СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2024

Оглавление

Теоремы сходимости

Пусть $X = \{X_n\}_{n \geqslant 0}$ — последовательность случайных величин, $a < b$. Положим $\tau_1 = \min\{n \geqslant 0\colon X_n \leqslant a\}$ и для любого $k \geqslant 1$

$$\tau_{2k} = \min\{n > \tau_{2k-1}\colon X_n \geqslant b\},$$

и

$$\tau_{2k+1} = \min\{n > \tau_{2k}\colon X_n \leqslant a\}$$

причём $\tau_{2k+1} = +\infty$, если $\{n > \tau_{2k}\colon X_n \leqslant a\} = \varnothing$, и $\tau_{2k} = +\infty$, если $\{n > \tau_{2k-1}\colon X_n \geqslant b\} = \varnothing$.

Теоремы сходимости

Обозначим

$$U_n(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_2 > n, \\ \max\{k \geqslant 1\colon \tau_{2k} \leqslant n\}, & \text{если } \tau_2 \leqslant n. \end{cases}$$

$U_n(a,b)$ — число пересечений полосы (a,b) снизу вверх последовательностью $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ за промежуток времени от 0 до n.

Нетрудно видеть, что $U_n(a,b) \nearrow U(a,b) = \sup\{k \geqslant 1\colon \tau_{2k} < \infty\}$.

Напомним, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ существует в $\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда $U(a,b) < \infty$ для любых $a, b \in \mathbb{Q}$ таких, что $a < b$.

Теоремы сходимости

Теорема 4.14 (Дуб)

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ *— субмартингал и пусть* $a < b$. *Тогда*

$$\mathsf{E}U_n(a,b) \leqslant \frac{\mathsf{E}(X_n - a)^+ - \mathsf{E}(X_0 - a)^+}{b-a} \leqslant \frac{\mathsf{E}(X_n - a)^+}{b-a}.$$

Доказательство

Определим последовательность H_n следующим образом: пусть $H_0 = 0$, $H_1 = I\{X_0 \leqslant a\}$ и

$$H_n = I\{X_{n-1} \leqslant b\} I\{H_{n-1} = 1\} + I\{X_{n-1} \leqslant a\} I\{H_{n-1} = 0\}, \quad n \geqslant 2.$$

Нетрудно заметить, что последовательность $\{H_n, \mathcal{F}_{n-1}\}_{n \geqslant 0}$ предсказуема и $H_n \in \{0, 1\}$.

Рассмотрим последовательность $Y_n = a + (X_n - a)^+$. Так как $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ — субмартингал, то и $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ также образует субмартингал. Отметим, что число пересечений полосы (a, b) снизу вверх последовательностью $\{Y_n\}_{n \geqslant 0}$ и последовательностью $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ одинаковое.

Теоремы сходимости

Доказательство

Обозначим $Z_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(Y_k - Y_{k-1})$ и $V_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - H_k)(Y_k - Y_{k-1})$.

Тогда $Z_n \geqslant (b-a)U_n$ и $Y_n - Y_0 = \sum_{k=1}^{n} (Y_k - Y_{k-1}) = Z_n + V_n$.

Заметим также, что $\{V_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — субмартингал в силу леммы 3.21. Тогда $0 = \mathsf{E}V_0 \leqslant \mathsf{E}V_n$ и, следовательно,

$$(b-a)\mathsf{E}U_n \leqslant \mathsf{E}Z_n \leqslant \mathsf{E}(Y_n - Y_0) = \mathsf{E}(X_n - a)^+ - \mathsf{E}(X_0 - a)^+.$$

$\square$

Теоремы сходимости

Следствие 4.5

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ *— супермартингал и пусть* $a < b$. *Тогда*

$$\mathsf{E}U_n(a,b) \leqslant \frac{\mathsf{E}(X_n - a)^-}{b-a}.$$

Доказательство

Имеет место следующее неравенство:

$$Z_n + (X_n - a)^- \geqslant Z_n \geqslant (b-a)U_n,$$

где величины Z_n определены в доказательстве теоремы 4.14.
Заметим, что $\{Z_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — супермартингал. Тогда

$$0 = \mathsf{E}Z_0 \geqslant \mathsf{E}Z_n \geqslant (b-a)\mathsf{E}U_n - \mathsf{E}(X_n - a)^-.$$

□

Теорема 4.15

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— субмартингал такой, что* $\sup\limits_{n \geqslant 0} \mathsf{E}|X_n| < \infty$*.*
Тогда существует случайная величина X_∞ *такая, что* $\mathsf{P}(|X_\infty| < \infty) = 1$*,* $\mathsf{E}|X_\infty| < \infty$ *и* $X_n \to X_\infty$ *п. н.*

Теоремы сходимости

Доказательство

Предположим, что $\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} X_n > \liminf_{n\to\infty} X_n) > 0$. Заметим, что

$$\{\limsup_{n\to\infty} X_n > \liminf_{n\to\infty} X_n\} = \bigcup_{a<b;\, a,b\in\mathbb{Q}} \{\limsup_{n\to\infty} X_n > b > a > \liminf_{n\to\infty} X_n\}.$$

Тогда найдутся $a, b \in \mathbb{Q}$ такие, что

$$\mathsf{P}(\limsup_{n\to\infty} X_n > b > a > \liminf_{n\to\infty} X_n) > 0. \tag{4.17}$$

Доказательство

Пусть $U_n(a,b)$ — число пересечений полосы (a,b) снизу вверх последовательностью $X_0, X_1, \dots, X_n$, и пусть $U(a,b) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(a,b)$.

Тогда

$$\mathsf{E}U_n \leqslant \frac{\mathsf{E}(X_n - a)^+}{b-a} \leqslant \frac{\mathsf{E}|X_n| + |a|}{b-a} \leqslant \frac{\sup\limits_{n\geqslant 0} \mathsf{E}|X_n| + |a|}{b-a} < \infty,$$

поскольку $(x-y)^+ \leqslant |x| + |y|$.
Так как $U_n \nearrow U$ и величины $\mathsf{E}U_n$ равномерно ограничены, то $\mathsf{E}U_n \to \mathsf{E}U < \infty$, что противоречит (4.17).
Следовательно, с вероятностью 1 существует $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty$.
В силу леммы Фату $\mathsf{E}|X_\infty| \leqslant \sup\limits_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$, и, в частности, $\mathsf{P}(|X_\infty| < \infty) = 1$. $\square$

Теоремы сходимости

Следствие 4.6

Если $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— неположительный мартингал (субмартингал) или неотрицательный мартингал (супермартингал), то существует случайная величина* X_∞ *такая, что* $\mathsf{P}(|X_\infty| < \infty) = 1$, $\mathsf{E}|X_\infty| < \infty$ *и* $X_n \to X_\infty$ *п. н.*

Доказательство

Заметим, что если X — неположительный мартингал или субмартингал, то $X_n^+ = 0$. Если X — неотрицательный мартингал или супермартингал, то $-X$ — неположительный мартингал или субмартингал. $\square$

Равномерно интегрируемые мартингалы

Определение 4.12

Семейство случайных величин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\alpha\in\Lambda}\mathsf{E}(|X_\alpha|;\,|X_\alpha|\geqslant N)=0.$$

Определение 4.13

Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ называется *равномерно интегрируемой*, если

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\mathsf{E}(|X_n|;\,|X_n|\geqslant N)=0.$$

Равномерно интегрируемые мартингалы

Лемма 4.26

Если последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируема, то $\sup\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{E}|X_n| < \infty$.

Доказательство

Выберем N настолько большим, чтобы $\sup\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{E}(|X_n|;\ |X_n| \geqslant N) \leqslant 1$.

Тогда

$$\sup_{n\geqslant 1} \mathsf{E}|X_n| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \mathsf{E}(|X_n|;\ |X_n| < N) + \sup_{n\geqslant 1} \mathsf{E}(|X_n|;\ |X_n| \geqslant N) \leqslant N + 1 < \infty.$$

□

Равномерно интегрируемые мартингалы

Лемма 4.27

Если $|X_n| \leqslant X$ *п. н. для всех* $n \geqslant 1$ *и* $\mathsf{E}X < \infty$, *то последовательность случайных величин* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *равномерно интегрируема.*

Доказательство

Действительно, так как $|X_n| \leqslant X$ п. н., то $|X_n|I(|X_n| \geqslant N) \leqslant XI(X \geqslant N)$ п. н. для всех $n \geqslant 1$ и $N > 0$. Так как $\mathsf{E}X < \infty$, то $\mathsf{E}(XI(X \geqslant N)) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно

$$\sup_{n\geqslant 1} \mathsf{E}|X_n|I(|X_n| \geqslant N) \leqslant \mathsf{E}(XI(X \geqslant N)) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

$\square$

Равномерно интегрируемые мартингалы

Следствие 4.7

Если $\mathsf{E}(\sup\limits_{n\geqslant 1}|X_n|) < \infty$, *то последовательность случайных величин* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *равномерно интегрируема.*

Лемма 4.28

Пусть последовательность положительных случайных величин $\{Y_n\}_{n\geqslant 1}$ *равномерно интегрируема. Если* $|X_n| \leqslant Y_n$ *п. н. для всех* $n \geqslant 1$, *то последовательность* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *равномерно интегрируема.*

Доказательство

Утверждение леммы следует из соотношения

$$|X_n| I(|X_n| \geqslant N) \leqslant Y_n I(Y_n \geqslant N) \text{ п. н.}$$

для всех $n \geqslant 1$ и $N > 0$. □

Лемма 4.29

Пусть последовательности случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *и* $\{Y_n\}_{n\geqslant 1}$ *равномерно интегрируемы. Тогда последовательности* $\{\max(X_n, Y_n)\}_{n\geqslant 1}$ *и* $\{X_n + Y_n\}_{n\geqslant 1}$ *также равномерно интегрируемы.*

Доказательство

Упражнение.

Равномерно интегрируемые мартингалы

Лемма 4.30

Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *равномерно интегрируема тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{E}|X_n| < \infty$ *и*

$$\sup_{n\geqslant 1} \mathsf{E}(|X_n| I_A) \to 0 \quad \text{при} \quad \mathsf{P}(A) \to 0. \tag{4.18}$$

Доказательство

Необходимость. Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — равномерно интегрируема. Тогда $\sup\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{E}|X_n| < \infty$ в силу леммы 4.26.
Далее, для произвольного события A имеем:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(|X_n|I_A) &= \mathsf{E}(|X_n|I_A I\{|X_n| \geqslant N\}) + \mathsf{E}(|X_n|I_A I\{|X_n| < N\}) \leqslant \\ &\leqslant \mathsf{E}(|X_n|I\{|X_n| \geqslant N\}) + N\mathsf{P}(A). \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем N настолько большим, чтобы $\mathsf{E}(|X_n|I\{|X_n| \geqslant N\}) < \varepsilon/2$ для всех $n \geqslant 1$. Тогда $\sup\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{E}(|X_n|I_A) < \varepsilon$, если $\mathsf{P}(A) < \varepsilon/(2N)$.

Равномерно интегрируемые мартингалы

Доказательство

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть $\delta > 0$ такое, что $\mathsf{P}(A) < \delta$. Положим $A_n = \{|X_n| \geqslant N\}$. Так как $\sup\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{E}|X_n| < \infty$, то, применив неравенство Маркова, получаем:

$$\sup_{n\geqslant 1} \mathsf{P}(A_n) \leqslant \frac{\sup\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{E}|X_n|}{N} < \delta$$

для достаточно больших N. Из условия (4.18) следует, что

$$\sup_{n\geqslant 1} \mathsf{E}(|X_n| I(|X_n| \geqslant N)) = \sup_{n\geqslant 1} \mathsf{E}(|X_n| I_{A_n}) < \varepsilon$$

для достаточно больших N, что и означает равномерную интегрируемость последовательности $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$. □

Лемма 4.31 (Валле Пуссен)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность интегрируемых случайных величин, и пусть существует неотрицательная возрастающая функция* g *такая, что* $g(t)/t \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$ *и* $\sup\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{E} g(|X_n|) < \infty$. *Тогда* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— равномерно интегрируема.*

Доказательство

Пусть $\varepsilon > 0$, $M = \sup\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{E} g(|X_n|)$, $a = M/\varepsilon$. Выберем N столь большим, что $g(t)/t \geqslant a$ при $t \geqslant N$. Тогда

$$\mathsf{E}(|X_n| I\{|X_n| \geqslant N\}) \leqslant \frac{1}{a}\mathsf{E}(g(|X_n|) I\{|X_n| \geqslant N\}) \leqslant \frac{\mathsf{E} g(|X_n|)}{a} \leqslant \frac{M}{a} = \varepsilon.$$

$\square$

Положив $g(t) = t^p$ в лемме 4.31, получаем следующее утверждение.

Следствие 4.8

Если $\sup\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{E}|X_n|^p < \infty$ *для некоторого* $p > 1$, *то последовательность* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *равномерно интегрируема.*

Равномерно интегрируемые мартингалы

Теорема 4.16

Пусть $X_n \xrightarrow{\mathsf{p}} X$ *и* $\mathsf{E}|X_n| < \infty$ *для всех* $n \geqslant 1$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *Последовательность случайных величин* $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *равномерно интегрируема;*

(ii) $\mathsf{E}|X_n - X| \to 0$ *и* $\mathsf{E}|X| < \infty$*;*

(iii) $\mathsf{E}|X_n| \to \mathsf{E}|X| < \infty$.

Равномерно интегрируемые мартингалы

Доказательство

Пусть последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируема. Тогда $\sup\limits_{n\geqslant 1} \mathsf{E}|X_n| < \infty$ в силу леммы 4.26. Далее, из сходимости по вероятности следует, что существует подпоследовательность $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ такая, что $X_{n_k} \to X$ п. н. Следовательно, в силу леммы Фату имеем:

$$\mathsf{E}|X| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}|X_{n_k}| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \mathsf{E}|X_n| < \infty.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathsf{E}|X_n - X| &= \mathsf{E}(|X_n - X| I(|X_n - X| < \varepsilon)) + \\ &+ \mathsf{E}(|X_n - X| I(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)) \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon + \mathsf{E}(|X_n - X| I(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)). \end{aligned}$$

Равномерно интегрируемые мартингалы

Доказательство

Так как $|X_n - X| \leqslant |X_n| + |X|$, то из лемм 4.28 и 4.29 следует, что последовательность $\{|X_n - X|\}_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируема. А так как $\mathsf{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \to 0$, то из леммы 4.30 получаем:

$$\mathsf{E}(|X_n - X| I(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}|X_n - X| < \varepsilon,$$

что, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, доказывает сходимость $\mathsf{E}|X_n - X| \to 0$.

Доказательство

Пусть $\mathsf{E}|X_n - X| \to 0$ и $\mathsf{E}|X| < \infty$. Тогда из неравенства треугольника получаем:

$$\big|\mathsf{E}|X_n| - \mathsf{E}|X|\big| \leqslant \mathsf{E}\big||X_n| - |X|\big| \leqslant \mathsf{E}|X_n - X| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть $\mathsf{E}|X_n| \to \mathsf{E}|X| < \infty$. Докажем равномерную интегрируемость последовательности $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$.

Пусть $N > 1$. Рассмотрим непрерывную и ограниченную на всей прямой функцию $\varphi_N(x)$:

$$\varphi_N(x) = |x|I(|x| < N-1) + (N-1)(N-|x|)I(N-1 \leqslant |x| < N).$$

Заметим, что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$|x|I(|x| \geqslant N) \leqslant |x| - \varphi_N(x) \leqslant |x|I(|x| \geqslant N-1). \tag{4.19}$$

Доказательство

Так как $\mathsf{E}|X| < \infty$, то $\mathsf{E}(|X| I(|X| \geqslant N-1)) \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $n_1 = n_1(\varepsilon)$ такой, что для всех $N \geqslant n_1$

$$\mathsf{E}|X| - \mathsf{E}\varphi_N(X) < \varepsilon/2.$$

Далее, так как $X_n \xrightarrow{\mathsf{p}} X$ и функция $\varphi_N(x)$ непрерывна, то $\varphi_N(X_n) \xrightarrow{\mathsf{p}} \varphi_N(X) \leqslant N-1$. Отсюда следует, что $\mathsf{E}\varphi_N(X_n) \to \mathsf{E}\varphi_N(X)$. А так как $\mathsf{E}|X_n| \to \mathsf{E}|X|$, то

$$\mathsf{E}|X_n| - \mathsf{E}\varphi_N(X_n) \to \mathsf{E}|X| - \mathsf{E}\varphi_N(X).$$

Доказательство

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $n_2 = n_2(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geqslant n_2$

$$\mathsf{E}|X_n| - \mathsf{E}\varphi_N(X_n) \leqslant \mathsf{E}|X| - \mathsf{E}\varphi_N(X) + \varepsilon/2.$$

Из соотношения (4.19) окончательно получаем, что для всех $N \geqslant n_1$ и всех $n \geqslant n_2$

$$\mathsf{E}(|X_n| I(|X_n| \geqslant N)) \leqslant \mathsf{E}|X_n| - \mathsf{E}\varphi_N(X_n) < \varepsilon.$$

Так как $\mathsf{E}|X_n| < \infty$ для всех $n \geqslant 1$, то можно выбрать $N \geqslant n_1$ так, чтобы

$$\mathsf{E}(|X_n| I(|X_n| \geqslant N)) < \varepsilon$$

для всех $1 \leqslant n < n_2$.

Равномерно интегрируемые мартингалы

Доказательство

Итак, любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для всех $N \geqslant n_0$

$$\sup_{n \geqslant 1} \mathsf{E}(|X_n| I(|X_n| \geqslant N)) < \varepsilon,$$

что и доказывает равномерную интегрируемость последовательности $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$. $\square$

Равномерно интегрируемые мартингалы

Определение 4.14

Мартингал (субмартингал или супермартингал) $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ называется *равномерно интегрируемым*, если последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$ равномерно интегрируема.

Лемма 4.32

Пусть $\mathsf{E}|X| < \infty$. *Тогда семейство случайных величин*

$$\{\mathsf{E}(X \mid G) \colon G \subseteq \mathcal{F}\}$$

является равномерно интегрируемым. В частности, мартингал Леви является равномерно интегрируемым.

Равномерно интегрируемые мартингалы

Доказательство

Из неравенства $|\mathsf{E}(X \mid G)| \leqslant \mathsf{E}(|X| \mid G)$ п. н. (п. 8 леммы 3.2) следует, что достаточно проверить равномерную интегрируемость семейства $\{\mathsf{E}(|X| \mid G)\colon G \subseteq \mathcal{F}\}$.

Обозначим $Y = \mathsf{E}(|X| \mid G)$. Тогда случайная величина Y измерима относительно G и $B = \{Y \geqslant M\} \in G$. По определению условного математического ожидания $\mathsf{E}(Y I_B) = \mathsf{E}(|X| I_B)$. Применив неравенство Маркова $\mathsf{P}(B) \leqslant \frac{\mathsf{E}Y}{M}$, получим оценку:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}Y I_B &= \mathsf{E}|X| I_B = \mathsf{E}(|X| I_B I\{|X| > N\}) + \mathsf{E}(|X| I_B I\{|X| < N\}) \\
&\leqslant (\mathsf{E}|X| I\{|X| \geqslant N\}) + N\mathsf{P}(B) \leqslant \mathsf{E}(|X| I\{|X| \geqslant N\}) + \frac{N}{M}\mathsf{E}Y.
\end{aligned}$$

Выберем N достаточно большим, чтобы $\mathsf{E}(|X| I(|X| \geqslant N)) \leqslant \varepsilon/2$.

Затем выберем M настолько большим, чтобы $\dfrac{N}{M}\mathsf{E}Y < \varepsilon/2$. $\square$

Равномерно интегрируемые мартингалы

Теорема 4.17

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— равномерно интегрируемый субмартингал. Тогда существует интегрируемая случайная величина* X_∞ *такая, что* $X_n \to X_\infty$ *п. н. и* $\mathsf{E}|X_n - X_\infty| \to 0$.

Доказательство

Существование предела $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ п. н. следует из теоремы 4.15.
Сходимость $\mathsf{E}|X_n - X_\infty| \to 0$ следует из теоремы 4.16. $\square$

Следствие 4.9

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— субмартингал такой, что* $\sup\limits_{n \geqslant 0} \mathsf{E}|X_n|^p < \infty$ *для некоторого* $p > 1$*. Тогда существует интегрируемая случайная величина* X_∞ *такая, что* $X_n \to X_\infty$ *п. н. и* $\mathsf{E}|X_n - X_\infty| \to 0$*.*

Равномерно интегрируемые мартингалы

Теорема 4.18

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— равномерно интегрируемый мартингал.*
Тогда существует интегрируемая случайная величина X_∞ *такая, что* $X_n \to X_\infty$ *п. н. и* $\mathsf{E}|X_n - X_\infty| \to 0$.
Более того, $X_n = \mathsf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_n)$ *п. н.*

Равномерно интегрируемые мартингалы

Доказательство

Мартингал является субмартингалом, поэтому первая часть теоремы следует из теоремы 4.17. Измеримость относительно $\mathcal{F}_n$ случайной величины X_n следует из условия. Проверим, что $\mathsf{E}(X_n I_B) = \mathsf{E}(X_\infty I_B)$ для любого $B \in \mathcal{F}_n$.

Так как X — мартингал, то $\mathsf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ для любого $m \geqslant n$, то есть $\mathsf{E}(X_m I_B) = \mathsf{E}(X_n I_B)$ для любого $m \geqslant n$ и для любого $B \in \mathcal{F}_n$.

Отсюда получаем:

$$|\mathsf{E}(X_n I_B) - \mathsf{E}(X_\infty I_B)| = |\mathsf{E}(X_m I_B) - \mathsf{E}(X_\infty I_B)| \leqslant \mathsf{E}|X_m - X_\infty| \to 0$$

при $m \to \infty$. Следовательно, $\mathsf{E}(X_n I_B) = \mathsf{E}(X_\infty I_B)$. $\square$