СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2024

Оглавление

Моменты остановки

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}, \mathsf{P})$ — фильтрованное вероятностное пространство.

Определение 4.10

Отображение $T\colon \Omega \to \{0, 1, \dots\} \cup \{+\infty\}$ называется *моментом остановки* относительно потока σ-алгебр $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$, если $\{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ для любого $n \geqslant 0$.

Лемма 4.15

Пусть $T\colon \Omega \to \{0, 1, \ldots\} \cup \{+\infty\}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) T *— момент остановки относительно потока σ-алгебр* $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$;

(ii) $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ *для любого* $n \geqslant 0$;

(iii) $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$ *для любого* $n \geqslant 0$.

Моменты остановки

Доказательство

Действительно, если $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ для любого $n \geqslant 0$, то
$\{T \leqslant n\} = \bigcup\limits_{k=0}^{n} \{T = k\} \in \mathcal{F}_n$.
Наоборот, если $\{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ для любого $n \geqslant 0$, то
$\{T = n\} = \{T \leqslant n\} \setminus \{T \leqslant n-1\} \in \mathcal{F}_n$.
Эквивалентность условий $\{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ и $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n$ очевидна, так как $\{T > n\} = \Omega \setminus \{T \leqslant n\}$. $\square$

Пример 6.

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ — стохастическая последовательность и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда момент первого попадания в множество B

$$T_B = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n \in B\}$$

($T_B = +\infty$, если $X_n \notin B$ при всех $n \geqslant 0$) является моментом остановки, так как для любого $n \geqslant 0$

$$\{X_0 \in B\} \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_n, \ldots, \{X_{n-1} \in B\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n, \{X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n,$$

и, следовательно,

$$\{T_B = n\} = \{X_0 \notin B, \ldots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n.$$

С другой стороны, момент последнего посещения множества B

$$T = \sup\{n \geqslant 0\colon X_n \in B\}$$

как правило не является моментом остановки, так как множество

$$\{T = n\} = \{X_n \in B, X_{n+1} \notin B, X_{n+1} \notin B, \ldots\} \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$$

не принадлежит, вообще говоря, σ-алгебре $\mathcal{F}_n$.

Пример 7.

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ — стохастическая последовательность, T — момент остановки и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда момент первого попадания в множество B после момента T

$$S = \inf\{n > T \colon X_n \in B\}$$

также является моментом остановки.
Действительно, для каждого $n \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned} \{S = n\} &= \{T < n\} \cap \{X_T \notin B, \ldots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} = \\ &= \bigcup_{k=0}^{n-1} \{T = k\} \cap \{X_k \notin B, \ldots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n. \end{aligned}$$

Моменты остановки

Лемма 4.16

1. *Пусть* m *— целое неотрицательное число. Тогда* $T \equiv m$ *— момент остановки (относительно любого потока σ-алгебр).*

2. *Пусть* S *и* T *— моменты остановки. Тогда* $S + T$, $S \wedge T$, $S \vee T$ *также являются моментами остановки.*

3. *Пусть* $\{T_n\}_{n \geqslant 0}$ *— последовательность моментов остановки таких, что* $T_n(\omega) \nearrow T(\omega)$ *или* $T_n(\omega) \searrow T(\omega)$ *для любого* $\omega \in \Omega$*. Тогда* T *— момент остановки.*

4. *Пусть* $\{T_n\}_{n \geqslant 0}$ *— последовательность моментов остановки. Тогда* $\sup\limits_{n \geqslant 0} T_n$ *и* $\inf\limits_{n \geqslant 0} T_n$ *также являются моментами остановки.*

Из леммы 4.16, в частности, следует, что $T \wedge n$ является моментом остановки для любого $n \geqslant 0$.

Моменты остановки

Доказательство

Пусть $T \equiv m$. Тогда

$$\{T = n\} = \begin{cases} \Omega, & \text{если } n = m, \\ \varnothing, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

Но $\varnothing$ и Ω являются элементами любой σ-алгебры, в частности, $\varnothing, \Omega \in \mathcal{F}_n$ для любого $n \geqslant 0$, т. е. $T \equiv m$ — момент остановки. Далее, так как $\{S \wedge T \leqslant n\} = \{S \leqslant n\} \cup \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$, $\{S \vee T \leqslant n\} = \{S \leqslant n\} \cap \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$ и

$$\{S + T = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{S = k, T = n - k\} \in \mathcal{F}_n,$$

то $S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$ являются моментами остановки.

Моменты остановки

Доказательство

Если $T_n \nearrow T$, то $\{T \leqslant n\} = \bigcap\limits_{k \geqslant 0} \{T_k \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$, т. е. T — момент остановки.

Аналогично, если $T_n \searrow T$, то $\{T \leqslant n\} = \bigcup\limits_{k \geqslant 0} \{T_k \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$, и, следовательно, T является моментом остановки.

Последнее утверждение следует из предыдущих, так как

$$\sup_{n \geqslant 0} T_n = \lim_{n \to \infty} \max\{T_1, \ldots, T_n\} \quad \text{и} \quad \inf_{n \geqslant 0} T_n = \lim_{n \to \infty} \min\{T_1, \ldots, T_n\}.$$

$\square$

Пусть T — момент остановки относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$. Рассмотрим совокупность множеств

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \colon A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ для всех } n \geqslant 0\}.$$

Лемма 4.17

$\mathcal{F}_T$ — σ-алгебра.

$\mathcal{F}_T$ можно считать σ-алгеброй событий, «произошедших до момента времени T».

Моменты остановки

Доказательство

Так как $\Omega \in \mathcal{F}$ и $\Omega \cap \{T = n\} = \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ для всех $n \geqslant 0$, то $\Omega \in \mathcal{F}_T$.
Кроме того, если $A \in \mathcal{F}_T$, то
$\overline{A} \cap \{T = n\} = \{T = n\} \setminus (A \cap \{T = n\}) \in \mathcal{F}_n$ и, значит, $\overline{A} \in \mathcal{F}_T$.
И, наконец, пусть $\{A_k\}_{k \geqslant 1}$ — последовательность событий таких, что $A_k \in \mathcal{F}_T$, $k \geqslant 1$. Тогда для всех $n \geqslant 0$

$$\left(\bigcup_{k \geqslant 1} A_k\right) \cap \{T = n\} = \bigcup_{k \geqslant 1} (A_k \cap \{T = n\}) \in \mathcal{F}_n.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{F}_T$ является σ-алгеброй. $\square$

Лемма 4.18

Пусть T — момент остановки относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$. Тогда

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}\colon A \cap \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n \text{ для всех } n \geqslant 0\}.$$

Доказательство

Упражнение.

Лемма 4.19

Пусть T *— момент остановки относительно* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ *и пусть* $\mathcal{F}_T$ *— соответствующая σ-алгебра. Тогда*

1. $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_m$, *если* $T \equiv m$.
2. $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$.
3. T *измерима относительно* $\mathcal{F}_T$.
4. $\{T = +\infty\} \in \mathcal{F}$.

Доказательство

Для доказательства первого свойства достаточно заметить, что для любого $A \in \mathcal{F}$

$$A \cap \{T = n\} = \begin{cases} A, & \text{если } n = m, \\ \varnothing, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

Второе свойство следует из определения: σ-алгебра $\mathcal{F}_T$ состоит из множеств $A \in \mathcal{F}$, удовлетворяющих дополнительному условию, т. е. $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$.

Доказательство

Далее, так как

$$\{T = m\} \cap \{T = n\} = \begin{cases} \{T = n\}, & \text{если } m = n, \\ \varnothing, & \text{если } m \neq n, \end{cases}$$

то $\{T = m\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ для всех $m, n \geqslant 0$. Значит, $\{T = m\} \in \mathcal{F}_T$ для всех $m \geqslant 0$, что и означает измеримость T относительно $\mathcal{F}_T$.

Последнее утверждение следует из соотношения

$$\{T = +\infty\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{T \geqslant n\} \in \mathcal{F}.$$

$\square$

Лемма 4.20

Пусть T_1 *и* T_2 *— моменты остановки относительно* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$*. Тогда*

1. *если* $A \in \mathcal{F}_{T_1}$*, то* $A \cap \{T_1 \leqslant T_2\} \in \mathcal{F}_{T_2}$*;*
2. *если* $T_1 \leqslant T_2$*, то* $\mathcal{F}_{T_1} \subseteq \mathcal{F}_{T_2}$*;*
3. $\mathcal{F}_{T_1 \wedge T_2} = \mathcal{F}_{T_1} \cap \mathcal{F}_{T_2}$*.*

Доказательство

Упражнение.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}, \mathsf{P})$ задана стохастическая последовательность $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$, и пусть T — момент остановки относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$. Обозначим

$$X_T = X_{T(\omega)}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(\omega) I(\omega\colon T(\omega) = k),$$

и положим $X_\infty = 0$ (т. е. $X_T = 0$ на множестве $\{T = \infty\}$).

Лемма 4.21

X_T — случайная величина и X_T измерима относительно $\mathcal{F}_T$.

Теоремы об оптимальной остановке

Доказательство

Для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ имеем:

$$\{X_T \in B\} = \{X_\infty \in B, T = \infty\} \bigcup_{k \geqslant 0} \{X_k \in B, T = k\} \in \mathcal{F}.$$

Следовательно, X_T является случайной величиной.
Аналогично, для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и для всех $n \geqslant 0$

$$\{X_T \in B\} \cap \{T = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Значит, $\{X_T \in B\} \in \mathcal{F}_T$, что и означает измеримость X_T относительно $\mathcal{F}_T$. $\square$

Лемма 4.22

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— супермартингал и пусть* $H = \{H_n, \mathcal{F}_{n-1}\}_{n \geqslant 0}$ *— предсказуемая последовательность такая, что* $0 \leqslant H_n \leqslant C$ *п. н. для некоторой положительной постоянной* C *и для всех* $n \geqslant 0$. *Тогда* $Z = \{Z_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 1}$ *образует супермартингал, где* $Z_n = \sum\limits_{j=1}^{n} H_j(X_j - X_{j-1})$, $n \geqslant 1$.

Теоремы об оптимальной остановке

Доказательство

Нетрудно заметить, что для каждого $n \geqslant 1$ случайная величина Z_n интегрируема и измерима относительно $\mathcal{F}_n$. Следовательно, $\mathsf{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_n) = Z_n$ п. н. Так как $Z_{n+1} = Z_n + H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)$, то

$$\mathsf{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = Z_n + \mathsf{E}(H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n) \text{ п. н.}$$

Далее, так как $\mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leqslant \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_n)$ п. н., H_{n+1} измерима относительно $\mathcal{F}_n$ и $H_{n+1} \geqslant 0$ п. н., то

$$\mathsf{E}(H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n) = H_{n+1}\mathsf{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) \leqslant 0 \text{ п. н.}$$

Таким образом, $\mathsf{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leqslant Z_n$ п. н., т. е. $\{Z_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ образует супермартингал. $\square$

Лемма 4.23

$X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ — мартингал (супермартингал) и пусть T — момент остановки. Тогда последовательность $X^T = \{X_{n \wedge T}, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ также образует мартингал (супермартингал).

Теоремы об оптимальной остановке

Доказательство

Действительно, из соотношения

$$X_{n\wedge T} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k I(T = k) + X_n I(T \geqslant n)$$

следует, что величины $X_{n\wedge T}$ измеримы относительно $\mathcal{F}_n$, интегрируемы и

$$X_{(n+1)\wedge T} - X_{n\wedge T} = I(T > n)(X_{n+1} - X_n).$$

Так как $\{T > n\} = \Omega \setminus \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$, то если X образует мартингал

$$\mathsf{E}\big(X_{(n+1)\wedge T} - X_{n\wedge T} \mid \mathcal{F}_n\big) = I(T > n)\mathsf{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) = 0 \text{ п. н.}$$

Если X образует супермартингал, то $\mathsf{E}\big(X_{(n+1)\wedge T} - X_{n\wedge T} \mid \mathcal{F}_n\big) \leqslant 0$ п. н. □

Пример 8.

Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ — последовательность независимых случайных величин таких, что $\mathsf{P}(\xi_n = -1) = \mathsf{P}(\xi_n = 1) = 1/2$ для любого $n \geqslant 0$, и пусть $S_n = \xi_0 + \ldots + \xi_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_n)$. Тогда $\mathsf{E}\xi_n = 0$ и, как показано в примере 1, $X = \{S_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ образует мартингал.
Положим $T = \min\{n \geqslant 0\colon X_n = 1\}$.
Нетрудно заметить, что T — момент остановки и $X_T = 1$ п. н.
Значит, $\mathsf{E}X_T = 1 \neq 0 = \mathsf{E}X_n$.

Теоремы об оптимальной остановке

Определение 4.11

Будем говорить, что T — *ограниченный момент остановки*, если $T \leqslant N$ для некоторого положительного целого $N < \infty$.
Будем говорить, что T — *конечный момент остановки*, если $\mathsf{P}(T < \infty) = 1$.

Теорема 4.8

Пусть T — ограниченный момент остановки. Тогда

1. *если $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ — супермартингал, то $\mathsf{E}X_T \leqslant \mathsf{E}X_0$;*
2. *если X — мартингал, то $\mathsf{E}X_T = \mathsf{E}X_0$;*
3. *если X — субмартингал, то $\mathsf{E}X_T \geqslant \mathsf{E}X_0$.*

Доказательство

Положим $Y_n = X_{T\wedge n}$. Тогда $Y = \{Y_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ образует супермартингал в силу леммы 4.23, и, значит, $\mathsf{E}Y_M \leqslant \mathsf{E}Y_0$. А так как $Y_M = X_{T\wedge M} = X_T$ п. н. и $Y_0 = X_{T\wedge 0} = X_0$, то окончательно получаем $\mathsf{E}X_T \leqslant \mathsf{E}X_0$. $\square$

Теорема 4.9

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— ограниченный супермартингал:* $|X_n| \leqslant M$ *п. н., и пусть* T *— конечный момент остановки. Тогда* $\mathsf{E} X_T \leqslant \mathsf{E} X_0$.

Доказательство

Так как $|X_n| \leqslant M$ п. н., то

$$\mathsf{E}|X_T| = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\big(|X_k| I(T = k)\big) \leqslant M \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(T = k) = M.$$

Положим $Y_n = X_{T \wedge n}$. Тогда $|Y_n| \leqslant M$ п. н. и $Y_n \to X_T$ п. н. при $n \to \infty$. Отсюда, в силу теоремы Лебега, следует, что $\mathsf{E}Y_n \to \mathsf{E}X_T$ при $n \to \infty$. С другой стороны, $Y = \{Y_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ образует супермартингал в силу леммы 4.23, и, значит, $\mathsf{E}Y_n \leqslant \mathsf{E}Y_0 = \mathsf{E}X_0$. Отсюда следует, что $\mathsf{E}X_T \leqslant \mathsf{E}X_0$. □

Теоремы об оптимальной остановке

Теорема 4.10

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— субмартингал такой, что*

$$\mathsf{E}(|X_{n+1} - X_n| \mid \mathcal{F}_n) \leqslant L \text{ п. н.}$$

для некоторой положительной постоянной L *и для всех* $n \geqslant 0$*, и пусть* T *— момент остановки такой, что* $\mathsf{E}T < \infty$*. Тогда* $\mathsf{E}|X_T| < \infty$ *и* $\mathsf{E}X_T \geqslant \mathsf{E}X_0$*.*

Доказательство

Упражнение.

Теорема 4.11

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— субмартингал,* T_1 *и* T_2 *— моменты остановки такие, что* $T_1 \leqslant T_2 \leqslant N$ *для некоторой положительной постоянной* N*. Тогда* $\mathsf{E}(X_{T_2} \mid \mathcal{F}_{T_1}) \geqslant X_{T_1}$ *п. н.*

Доказательство

Упражнение.

Следствие 4.2

Интегрируемая стохастическая последовательность $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *является мартингалом тогда и только тогда, когда* $\mathsf{E} X_{T_1} = \mathsf{E} X_{T_2}$ *для любых моментов остановки* T_1 *и* T_2 *таких, что* $T_1 \leqslant T_2 \leqslant N$.

Доказательство

Упражнение.