СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2024

Оглавление

Мартингалы

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ задан *поток* σ-алгебр:

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \mathcal{F}_n \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}.$$

Тогда $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}, \mathsf{P})$ называется *фильтрованным вероятностным пространством*.

Мартингалы

Пусть на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}, \mathsf{P})$ задана последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$.

Определение 4.4

Если для каждого $n \geqslant 0$ случайная величина X_n измерима относительно $\mathcal{F}_n$, то последовательность $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ называется *стохастической последовательностью*.

Определение 4.5

Говорят, что стохастическая последовательность $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ образует *мартингал*, если для всех $n \geqslant 0$ $\mathsf{E}|X_n| < \infty$ и

$$\mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \quad \text{п. н.} \tag{4.2}$$

Если вместо (4.2) выполнено условие

$$\mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geqslant X_n \quad \text{п. н.,} \tag{4.3}$$

то $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ называется *субмартингалом*.
Если вместо (4.2) выполнено условие

$$\mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leqslant X_n \quad \text{п. н.,} \tag{4.4}$$

то $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ называется *супермартингалом*.

Из определения 4.5 очевидным образом следует, что $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ — субмартингал тогда и только тогда, когда $-X = \{-X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ — супермартингал, и что мартингал одновременно является субмартингалом и супермартингалом.

Мартингалы

Лемма 4.7

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— стохастическая последовательность такая, что* $\mathsf{E}|X_n| < \infty$ *для всех* $n \geqslant 0$. *Тогда* X *является мартингалом тогда и только тогда, когда* $\mathsf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ *п. н. для всех* $m > n \geqslant 0$.

Доказательство

Если $\mathsf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ п. н. для всех $m > n \geqslant 0$, то полагая $m = n + 1$, очевидным образом получаем, что X — мартингал.
Пусть X — мартингал. Тогда $X_{m-1} = \mathsf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_{m-1})$ п. н. и из леммы 3.4 получаем:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n) &= \mathsf{E}(\mathsf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_{m-1}) \mid \mathcal{F}_n) = \mathsf{E}(X_{m-1} \mid \mathcal{F}_n) = \ldots = \\ &= \mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \text{ п. н.} \end{aligned}$$

$\square$

Точно также доказывается следующее утверждение.

Лемма 4.8

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— стохастическая последовательность такая, что* $\mathsf{E}|X_n| < \infty$ *для всех* $n \geqslant 0$. *Тогда* X *является субмартингалом или супермартингалом тогда и только тогда, когда* $\mathsf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n) \geqslant X_n$ *п. н. или* $\mathsf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n) \leqslant X_n$ *п. н. для всех* $m > n \geqslant 0$ *соответственно.*

Мартингалы

Применяя формулу полной вероятности (п. 5 леммы 3.2), из лемм 4.7 и 4.8 получаем, что если $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ — мартингал, то для всех $m > n \geqslant 0$

$$\mathsf{E}X_n = \mathsf{E}(\mathsf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n)) = \mathsf{E}X_m,$$

то есть $\mathsf{E}X_n = \mathsf{E}X_0$ для любого $n \geqslant 1$.
Если $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ — субмартингал, то для всех $m > n \geqslant 0$

$$\mathsf{E}X_n \leqslant \mathsf{E}(\mathsf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n)) = \mathsf{E}X_m,$$

то есть $\mathsf{E}X_0 \leqslant \mathsf{E}X_1 \leqslant \ldots \leqslant \mathsf{E}X_n \leqslant \ldots$
Для супермартингала имеем:

$$\mathsf{E}X_n \geqslant \mathsf{E}(\mathsf{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n)) = \mathsf{E}X_m, \quad m > n \geqslant 0,$$

и $\mathsf{E}X_0 \geqslant \mathsf{E}X_1 \geqslant \ldots \geqslant \mathsf{E}X_n \geqslant \ldots$

Пример 1.

Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых случайных величин с $\mathsf{E}\xi_n = 0$ для любого $n \geqslant 1$ и пусть $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_n)$. Тогда $X = \{S_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал.

Действительно,

$$\mathsf{E}(S_{n+1} - S_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathsf{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathsf{E}\xi_{n+1} = 0 \text{ п. н.}$$

Пример 2.

Если в условиях примера 1 $\mathsf{E}\xi_n^2 = 1$ для любого $n \geqslant 1$, то последовательность $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ образует мартингал, где $X_n = S_n^2 - n$.

В самом деле,

$$S_{n+1}^2 - S_n^2 = \xi_{n+1}(S_{n+1} + S_n) = \xi_{n+1}(2S_n + \xi_{n+1}) = \xi_{n+1}^2 + 2S_n\xi_{n+1}.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) &= \mathsf{E}(\xi_{n+1}^2 + 2S_n\xi_{n+1} - 1 \mid \mathcal{F}_n) = \\ &= \mathsf{E}(\xi_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) + 2\mathsf{E}(S_n\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - 1 = \\ &= \mathsf{E}\xi_{n+1}^2 + 2S_n\mathsf{E}\xi_{n+1} - 1 = 0 \text{ п. н.} \end{aligned}$$

Пример 3.

Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ — последовательность независимых случайных величин с $\mathsf{E}\xi_n = 1$, и пусть $X_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \xi_k$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_n)$. Тогда $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал.

Так как

$$X_{n+1} - X_n = \xi_{n+1} X_n - X_n,$$

то

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) &= \mathsf{E}(\xi_{n+1} X_n \mid \mathcal{F}_n) - \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_n) = \\ &= X_n \mathsf{E}\xi_{n+1} - X_n = 0 \text{ п. н.} \end{aligned}$$

Пример 4.

Если $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ — последовательность неотрицательных случайных величин с $\mathsf{E}|\xi_n| < \infty$, то последовательность $X_n = \xi_0 + \ldots + \xi_n$ образует субмартингал. Если случайные величины неположительны, то последовательность $X_n = \xi_0 + \ldots + \xi_n$ образует супермартингал.

Определение 4.6

Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ называется *интегрируемой*, если $\mathsf{E}|X_n| < \infty$ для каждого $n \geqslant 0$.

Определение 4.7

Мартингал $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ называется L_p-*мартингалом*, $1 \leqslant p < \infty$, если $\mathsf{E}|X_n|^p < \infty$ для каждого $n \geqslant 0$.

Лемма 4.9

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал и пусть g — выпуклая функция такая, что $\mathsf{E}|g(X_n)| < \infty$. Тогда $\{g(X_n), \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — субмартингал.

Типичными примерами применения леммы 4.9 являются функции $|x|^p$ при $p \geqslant 1$, x^+, x^-, $|x|^p(\log^+ |x|)^r$ при $p, r \geqslant 1$.

Лемма 4.10

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ *— субмартингал и пусть* g *— выпуклая неубывающая функция такая, что* $\mathsf{E}|g(X_n)| < \infty$*. Тогда* $\{g(X_n), \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ *— субмартингал.*

Здесь типичными примерами являются функции x^+, $(x^+)^p$ при $p > 1$. Заметим, что функции $|x|$ и x^- не удовлетворяют условиям леммы 4.10.
Ввиду особой важности этих примеров и для удобства ссылок, соберём эти факты в отдельное утверждение.

Лемма 4.11

1. *Пусть* $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— мартингал. Тогда* $\{X_n^+, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$, $\{X_n^-, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *и* $\{|X_n|, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— субмартингалы;*
2. *Пусть* $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *—* L_p*-мартингал для некоторого* $p \geqslant 1$*. Тогда* $\{|X_n|^p, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— субмартингал;*
3. *Пусть* $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— субмартингал. Тогда* $\{X_n^+, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— субмартингал;*
4. *Пусть* $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— неотрицательный* L_p*-субмартингал для некоторого* $p > 1$*. Тогда* $\{X_n^p, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— субмартингал.*

Лемма 4.12

Пусть $\mathsf{E}|X| < \infty$ *и* $X_n = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$. *Тогда последовательность* $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ *является мартингалом.*

Доказательство

Интегрируемость X_n и измеримость относительно $\mathcal{F}_n$ следуют из определения условного математического ожидания. Условие (4.2) следует из леммы 3.4:

$$\mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\big) = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{F}_n) = X_n \text{ п. н.}$$

$\square$

Мартингал $X_n = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ из леммы 4.12 называется *мартингалом Леви*.

Определение 4.8

Стохастическая последовательность $\{U_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ называется *мартингал-разностью*, если $\mathsf{E}|U_n| < \infty$ и $\mathsf{E}(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 0$ п. н. для всех $n \geqslant 0$.

Обозначим $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$.

Лемма 4.13

Если $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— мартингал, то* $U = \{U_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *с* $U_0 = X_0$ *и* $U_n = \Delta X_n$, $n \geqslant 1$, *является мартингал-разностью.*
Если $U = \{U_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— мартингал-разность и* $X_n = U_0 + \ldots + U_n$, $n \geqslant 0$, *то* $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— мартингал.*

Пример 5.

Если $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ — последовательность независимых случайных величин с $\mathsf{E}\xi_n = 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_n)$, то $\{\xi_n, \mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ — мартингал-разность.

Лемма 4.14

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *—* L_2*-мартингал и пусть* $U = \{U_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— соответствующая мартингал-разность. Тогда при* $m \neq n$

$$\mathsf{E}(U_m U_n) = 0$$

и при $m < n$

$$\mathsf{E}(X_m X_n) = \mathsf{E}X_m^2; \quad \mathsf{E}(X_n - X_m)^2 = \mathsf{E}X_n^2 - \mathsf{E}X_m^2;$$

$$\mathsf{E}\Big(\sum_{k=m+1}^{n} U_k\Big)^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \mathsf{E}U_k^2.$$

Доказательство

Так как U — мартингал разность, то $\mathsf{E}(U_n \mid \mathcal{F}_m) = 0$ п. н. при $m < n$. Тогда из лемм 3.2 (п. 5) и 3.5 следует, что при $m < n$

$$\mathsf{E}(U_m U_n) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(U_m U_n \mid \mathcal{F}_m)\big) = \mathsf{E}\big(U_m \mathsf{E}(U_n \mid \mathcal{F}_m)\big) = 0.$$

Следовательно,

$$\mathsf{E}\Big(\sum_{k=m+1}^{n} U_k\Big)^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \mathsf{E}U_k^2 + 2\sum_{i<j} \mathsf{E}(U_i U_j) = \sum_{k=m+1}^{n} \mathsf{E}U_k^2.$$

Аналогично получаем:

$$\mathsf{E}(X_m X_n) = \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(X_m X_n \mid \mathcal{F}_m)\big) = \mathsf{E}\big(X_m \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_m)\big) = \mathsf{E}X_m^2, \quad m < n,$$

и, следовательно,
$\mathsf{E}(X_n - X_m)^2 = \mathsf{E}X_n^2 - 2\mathsf{E}(X_m X_n) + \mathsf{E}X_m^2 = \mathsf{E}X_n^2 - \mathsf{E}X_m^2.$ $\square$

Определение 4.9

Если стохастическая последовательность $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ такова, что для всех $n \geqslant 0$ случайная величина X_n измерима относительно $\mathcal{F}_{n-1}$ ($\mathcal{F}_{-1} \equiv \mathcal{F}_0$), то последовательность $X = \{X_n, \mathcal{F}_{n-1}\}_{n \geqslant 0}$ называется *предсказуемой последовательностью*.

Теорема 4.7 (разложение Дуба)

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ — интегрируемая стохастическая последовательность. Тогда существуют мартингал $M = \{M_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ и предсказуемая последовательность $A = \{A_n, \mathcal{F}_{n-1}\}_{n \geqslant 0}$ с $A_0 = 0$ такие, что для каждого $n \geqslant 0$ имеет место разложение Дуба:

$$X_n = M_n + A_n \text{ п. н.} \tag{4.5}$$

В частности, $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ образует субмартингал (супермартингал) тогда и только тогда, когда последовательность $\{A_n\}_{n \geqslant 0}$ является неубывающей (невозрастающей) п. н. Разложение такого вида является единственным.

Доказательство

Положим $M_0 = X_0$, $A_0 = 0$, и пусть для каждого $n \geqslant 1$

$$M_n = M_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (X_{j+1} - \mathsf{E}(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j)), \tag{4.6}$$

$$A_n = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathsf{E}(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j) - X_j). \tag{4.7}$$

Заметим, что случайные величины $\mathsf{E}(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j)$ и X_j измеримы относительно $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_n$. Следовательно, каждое слагаемое в (4.7) измеримо относительно $\mathcal{F}_{n-1}$, то есть A — предсказуемая последовательность. Аналогично, каждое слагаемое в (4.6) измеримо относительно $\mathcal{F}_n$.

Доказательство

Покажем, что последовательность $M = \{M_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ образует мартингал. Для этого достаточно показать, что
$\mathsf{E}(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n) = 0$ п. н.
Действительно, так как $M_{n+1} - M_n = X_{n+1} - \mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ и случайная величина $\mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ измерима относительно $\mathcal{F}_n$, то

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n) &= \mathsf{E}(X_{n+1} - \mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_n) = \\ &= \mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - \mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 0 \text{ п. н.} \end{aligned}$$

Далее, так как $A_{n+1} - A_n = \mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - X_n$, то возрастание или убывание последовательности $\{A_n\}_{n \geqslant 0}$ равносильно тому, что последовательность $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ образует субмартингал или супермартингал соответственно.

Доказательство

Докажем единственность разложения (4.5). Пусть $X_n = M'_n + A'_n = M_n + A_n$ п. н. Тогда

$$\begin{aligned} A'_{n+1} - A'_n &= X_{n+1} - M'_{n+1} - X_n + M'_n = \\ &= (A_{n+1} - A_n) + (M_{n+1} - M_n) - (M'_{n+1} - M'_n). \end{aligned}$$

Возьмём условное математическое ожидание относительно $\mathcal{F}_n$ от обеих частей последнего равенства.

Мартингалы

Доказательство

Так как разности $A'_{n+1} - A'_n$ и $A_{n+1} - A_n$ измеримы относительно $\mathcal{F}_n$, последовательности M и M' образуют мартингал, то

$$\begin{aligned} A'_{n+1} - A'_n &= \mathsf{E}(A'_{n+1} - A'_n \mid \mathcal{F}_n) = \\ &= \mathsf{E}(A_{n+1} - A_n \mid \mathcal{F}_n) + \mathsf{E}(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n) - \\ &\qquad - \mathsf{E}(M'_{n+1} - M'_n \mid \mathcal{F}_n) = \\ &= A_{n+1} - A_n \text{ п. н.} \end{aligned}$$

Так как $A'_0 = A_0 = 0$, то окончательно получаем, что $A'_n = A_n$ п. н. и, следовательно, $M'_n = M_n$ п. н. $\square$