СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2024

Оглавление

Условные математические ожидания

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство.

Определение 4.1

Функция $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*, если X является $\mathcal{F}$-измеримой функцией, т. е. если для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — σ-алгебры на Ω и $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Тогда, как нетрудно заметить, измеримая относительно $\mathcal{F}_1$ функция будет измеримой и относительно $\mathcal{F}_2$. Измеримая же относительно $\mathcal{F}_2$ функция не обязана быть $\mathcal{F}_1$-измеримой.
Всюду далее в этом параграфе будем считать, что все рассматриваемые случайные величины заданы на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Условные математические ожидания

Напомним, что математическим ожиданием случайной величины X называется интеграл Лебега $\mathsf{E}X = \int\limits_{\Omega} X\,d\mathsf{P}$.

Если $B \in \mathcal{F}$, $\mathsf{P}(B) > 0$, то математическим ожиданием случайной величины X по множеству B называется

$$\mathsf{E}(X; B) = \int\limits_{B} X\,d\mathsf{P} = \mathsf{E}(X I_B),$$

где

$$I_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in B, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Условным математическим ожиданием случайной величины X относительно множества $B \in \mathcal{F}$, $\mathsf{P}(B) > 0$, называется

$$\mathsf{E}(X \mid B) = \frac{\mathsf{E}(X; B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Условные математические ожидания

Пусть на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ заданы меры P и Q.

Определение 4.2

Мера Q называется абсолютно непрерывной относительно P, $Q \ll P$, если $Q(A) = 0$ для любого множества $A \in \mathcal{F}$ такого, что $P(A) = 0$.

Теорема 4.1 (Радона — Никодима)

Пусть P и Q — σ-конечные меры. Если мера Q абсолютно непрерывна относительно P, то существует такая неотрицательная $\mathcal{F}$-измеримая функция f, что

$$Q(A) = \int\limits_A f\,dP$$

для любого $A \in \mathcal{F}$. Функция f единственна с точностью до значений на множестве P-меры 0.

Функция f интегрируема по мере P тогда и только тогда, когда мера Q конечна.

Пусть $\mathcal{G}$ — σ-алгебра и $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Определение 4.3

Условным математическим ожиданием случайной величины X относительно σ-алгебры $\mathcal{G}$ называется случайная величина, обозначаемая $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$, такая, что

(i) $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$ измерима относительно $\mathcal{G}$;

(ii) для любого $B \in \mathcal{G}$

$$\mathsf{E}(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) I_B) = \mathsf{E}(X I_B). \tag{4.1}$$

Условие (4.1) эквивалентно следующему:

$$\int\limits_B \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})\, d\mathsf{P} = \int\limits_B X\, d\mathsf{P}.$$

По определению случайная величина $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$ измерима относительно $\mathcal{G}$ (и, следовательно, относительно $\mathcal{F}$), тогда как X измерима относительно $\mathcal{F}$ и может не быть измеримой относительно $\mathcal{G}$.

Условные математические ожидания

Лемма 4.1

Если $\mathsf{E}|X| < \infty$, *то условное математическое ожидание* $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$ *существует и единственно с точностью до значений на множестве вероятности 0 (на множестве* P*-меры 0).*

Доказательство

Единственность. Пусть Y_1 и Y_2 измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{G}$ и $\mathsf{E}(Y_1; B) = \mathsf{E}(Y_2; B)$ для любого $B \in \mathcal{G}$. Обозначим $B_0 = \{Y_1 > Y_2\}$ и $Z = (Y_1 - Y_2)I_{B_0}$. Очевидно, что $B_0 \in \mathcal{G}$, Z измерима относительно $\mathcal{G}$ и $Z \geqslant 0$ п. н. Так как $\mathsf{E}Z = \mathsf{E}(Y_1 I_{B_0}) - \mathsf{E}(Y_2 I_{B_0}) = 0$, то $Z = 0$ п. н. Тогда $\mathsf{P}(B_0) = 0$ и, следовательно, $Y_1 \leqslant Y_2$ п. н. В силу симметрии $Y_2 \leqslant Y_1$ п. н. Значит, $Y_1 = Y_2$ п. н.

Доказательство

Существование. Пусть $X \geqslant 0$. Так как $\mathcal{G}$ — σ-алгебра и $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, то P — вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{G})$. Меру Q на $(\Omega, \mathcal{G})$ определим следующим образом:

$$Q(B) = \mathsf{E}(XI_B) = \int\limits_B X\,dP, \quad B \in \mathcal{G}.$$

Тогда $Q \ll \mathsf{P}$. Действительно, если $\mathsf{P}(B) = 0$, то $I_B = 0$ P-п. н. Следовательно, $XI_B = 0$ P-п. н. и $Q(B) = 0$.
По теореме Радона — Никодима существует неотрицательная $\mathcal{G}$-измеримая функция Y такая, что $Q(B) = \int\limits_B Y\,dP$ для всех $B \in \mathcal{G}$, т. е. $\mathsf{E}(YI_B) = \mathsf{E}(XI_B)$ для всех $B \in \mathcal{G}$.

Доказательство

Рассмотрим общий случай. Пусть $\mathsf{E}|X| < \infty$. Обозначим $X^+ = X \vee 0$, $X^- = (-X) \vee 0$, тогда $X = X^+ - X^-$. Пусть $Y^+ = \mathsf{E}(X^+ \mid \mathcal{G})$, $Y^- = \mathsf{E}(X^- \mid \mathcal{G})$ и $Y = Y^+ - Y^-$. Очевидно, что Y измерима относительно $\mathcal{G}$ и для любого $B \in \mathcal{G}$

$$\mathsf{E}(Y I_B) = \mathsf{E}(Y^+ I_B) - \mathsf{E}(Y^- I_B) = \mathsf{E}(X^+ I_B) - \mathsf{E}(X^- I_B) = \mathsf{E}(X I_B).$$

Таким образом, $Y = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$. $\square$

Условные математические ожидания

Пусть Y — случайная величина. Рассмотрим σ-алгебру

$$\sigma(Y) = \{Y^{-1}(B)\colon B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Тогда по определению полагаем $\mathsf{E}(X \mid Y) = \mathsf{E}(X \mid \sigma(Y))$.

Всюду далее в этом параграфе $\mathcal{G}$ — σ-алгебра, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Докажем основные свойства условных математических ожиданий.

Условные математические ожидания

Лемма 4.2

Пусть $\mathsf{E}|X| < \infty$ *и* $\mathsf{E}|Z| < \infty$. *Тогда*

1. *Если* $X \equiv C$, *то* $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) = C$ *п. н.*
2. *Если* X — $\mathcal{G}$*-измерима, то* $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$ *п. н.*
3. $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{F}) = X$ *п. н.*
4. *Если* $\mathcal{G}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, *то* $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}_0) = \mathsf{E}X$ *п. н.*
5. $\mathsf{E}(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathsf{E}X$.
6. $\mathsf{E}(aX + bZ \mid \mathcal{G}) = a\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathsf{E}(Z \mid \mathcal{G})$ *п. н.*
7. *Если* $X \leqslant Z$ *п. н., то* $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) \leqslant \mathsf{E}(Z \mid \mathcal{G})$ *п. н.*
8. $|\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})| \leqslant \mathsf{E}(|X| \mid \mathcal{G})$ *п. н.*

Доказательство

Первые два свойства очевидны. Функция $Y = C$ измерима относительно любой σ-алгебры и $\mathsf{E}(XI_B) = \mathsf{E}(CI_B) = \mathsf{E}(YI_B)$ для любого $B \in \mathcal{G}$. Если X измерима относительно $\mathcal{G}$, то X удовлетворяет определению условного математического ожидания. Отсюда сразу получаем свойство 3, так как X измерима относительно $\mathcal{F}$.

Так как функция $Y = \mathsf{E}X$ измерима относительно $\mathcal{G}_0$, то, очевидно, равенство (4.1) справедливо при $B = \varnothing$ и $B = \Omega$, что доказывает свойство 4.

Положив в (4.1) $B = \Omega$, получаем свойство 5, которое называется *формулой полной вероятности для условных математических ожиданий*.

Доказательство

Для доказательства свойства 6 заметим, что в силу определения условных математических ожиданий $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$ и $\mathsf{E}(Z \mid \mathcal{G})$ функция $Y = a\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathsf{E}(Z \mid \mathcal{G})$ измерима относительно $\mathcal{G}$ и для любого $B \in \mathcal{G}$

$$\mathsf{E}\left(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})I_B\right) = \mathsf{E}(XI_B) \quad \text{и} \quad \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(Z \mid \mathcal{G})I_B\right) = \mathsf{E}(ZI_B).$$

Следовательно, для всех $B \in \mathcal{G}$ имеем:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(YI_B) &= \mathsf{E}\Big(\big(a\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathsf{E}(Z \mid \mathcal{G})\big)I_B\Big) = \\
&= \mathsf{E}\Big(a\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})I_B + b\mathsf{E}(Z \mid \mathcal{G})I_B\Big) = \\
&= a\mathsf{E}(XI_B) + b\mathsf{E}(ZI_B) = \\
&= \mathsf{E}(aXI_B + bZI_B) = \mathsf{E}\left((aX + bZ)I_B\right).
\end{aligned}$$

Доказательство

Докажем свойство 7. Положим $Y = \mathsf{E}(Z \mid \mathcal{G}) - \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$ и $B_0 = \{Y < 0\} \in \mathcal{G}$. Тогда $Y = \mathsf{E}(Z - X \mid \mathcal{G})$ по свойству 6 и

$$0 \leqslant \mathsf{E}\left((Z - X)I_{B_0}\right) = \mathsf{E}\left(Y I_{B_0}\right) \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $\mathsf{E}\left(Y I_{B_0}\right) = 0$ и, значит, $\mathsf{P}(B_0) = 0$, т. е. $\mathsf{E}(Z \mid \mathcal{G}) \geqslant \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$ п. н.

Так как $-|X| \leqslant X \leqslant |X|$, то из свойств 6 и 7 получаем:

$$-\mathsf{E}(|X| \mid \mathcal{G}) \leqslant \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) \leqslant \mathsf{E}(|X| \mid \mathcal{G}) \text{ п. н.,}$$

что и доказывает свойство 8. $\square$

Лемма 4.3

Если X и $\mathcal{G}$ — независимы (т. е. X и I_B независимы для любого $B \in \mathcal{G}$), то $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathsf{E}X$ п. н.

Доказательство

Обозначим $Y = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$. Тогда для любого $B \in \mathcal{G}$ в силу независимости X и I_B имеем:

$$\mathsf{E}(YI_B) = \mathsf{E}(XI_B) = \mathsf{E}X\mathsf{E}I_B = \mathsf{E}\big((\mathsf{E}X)I_B\big).$$

$\square$

Лемма 4.4 (телескопические свойства)

Пусть $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ *— σ-алгебры,* $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$, *и* $\mathsf{E}|X| < \infty$. *Тогда*

1. *Если* $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, *то* $\mathsf{E}(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}_2) \mid \mathcal{G}_1) = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}_1)$ *п. н.*
2. *Если* $\mathcal{G}_1 \supseteq \mathcal{G}_2$, *то* $\mathsf{E}(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}_2) \mid \mathcal{G}_1) = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}_2)$ *п. н.*

Доказательство

Обозначим $Y_i = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}_i)$, $i = 1, 2$. По определению 4.3 $\mathsf{E}(Y_1 I_B) = \mathsf{E}(X I_B)$ для любых $B \in \mathcal{G}_1$ и $\mathsf{E}(Y_2 I_B) = \mathsf{E}(X I_B)$ для любых $B \in \mathcal{G}_2$. Так $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, то $\mathsf{E}(Y_1 I_B) = \mathsf{E}(Y_2 I_B)$ для любых $B \in \mathcal{G}_1$, что и означает(с учётом измеримости случайной величины Y_1 относительно $\mathcal{G}_1$) равенство $\mathsf{E}(Y_2 \mid \mathcal{G}_1) = Y_1$ п. н.

Второе утверждение очевидно, так как из условия $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1$ следует, что случайная величина Y_2 измерима относительно $\mathcal{G}_1$ и, значит, $\mathsf{E}(Y_2 \mid \mathcal{G}_1) = Y_2$ п. н. в силу п. 2 леммы 4.2. $\square$

Теорема 4.2 (неравенство Йенсена)

Пусть g — *выпуклая функция и* $\mathsf{E}|X| < \infty$, $\mathsf{E}|g(X)| < \infty$. *Тогда*

$$\mathsf{E}(g(X) \mid \mathcal{G}) \geqslant g(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})) \quad \text{п. н.}$$

Следствие 4.1

Пусть $\mathsf{E}|X|^p < \infty$ *для некоторого* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда*

$$|\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})|^p \leqslant \mathsf{E}(|X|^p \mid \mathcal{G}) \text{ п. н.}$$

Пусть $\mathsf{E}|X|^p < \infty$. Обозначим $\|X\|_p = (\mathsf{E}|X|^p)^{1/p}$. Тогда из следствия 4.1 следует, что

$$\|\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})\|_p \leqslant \|X\|_p.$$

Условные математические ожидания

Теорема 4.3

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность случайных величин таких, что* $\mathsf{E}|X_n|^p < \infty$ *для некоторого* $1 \leqslant p < \infty$. *Если* $X_n \xrightarrow{L_p} X$, $\mathsf{E}|X|^p < \infty$, *то*

$$\mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \xrightarrow{L_p} \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}).$$

Условные математические ожидания

Доказательство

Используя линейность условного математического ожидания, из следствия 4.1 получаем:

$$\mathsf{E}\big|\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) - \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G})\big|^p = \mathsf{E}\big|\mathsf{E}(X - X_n \mid \mathcal{G})\big|^p \leqslant \mathsf{E}|X - X_n|^p \to 0$$

при $n \to \infty$. $\square$

Теорема 4.4 (теорема о монотонной сходимости условных математических ожиданий)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность случайных величин. Если* $0 \leqslant X_n \uparrow X$ *п. н., то* $\mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \uparrow \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$ *п. н.*

Доказательство

Обозначим $Y_n = \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G})$. Так как $X_n \leqslant X_{n+1}$ п. н., то $Y_n \leqslant Y_{n+1}$ п. н. Следовательно, существует (измеримый) предел $Y = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$. Тогда по теореме о монотонной сходимости имеем:

$$\int\limits_B Y_n\, d\mathsf{P} \to \int\limits_B Y\, d\mathsf{P} \quad \text{и} \quad \int\limits_B X_n\, d\mathsf{P} \to \int\limits_B X\, d\mathsf{P},$$

для любого $B \in \mathcal{G}$. Так как $\mathsf{E}(X_n I_B) = \mathsf{E}(Y_n I_B)$ для любого $B \in \mathcal{G}$, то $\int\limits_B X\, d\mathsf{P} = \int\limits_B Y\, d\mathsf{P}$. Значит $Y = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$, т. е.

$$Y = \lim_{n\to\infty} Y_n = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G}) = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) \text{ п. н.}$$

$\square$

Теорема 4.5 (лемма Фату для условных математических ожиданий)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность неотрицательных случайных величин:* $X_n \geqslant 0$ *п. н. Тогда*

$$\mathsf{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n \mid \mathcal{G}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \quad \text{п. н.}$$

Доказательство

Обозначим $Y_n = \inf_{k \geqslant n} X_n$. Тогда $Y_n \leqslant X_k$ для всех $k \geqslant n$, $Y_n \leqslant Y_{n+1}$ и $Y_n \to \liminf_{n\to\infty} X_n$ п. н. Отсюда следует, что $\mathsf{E}(Y_n \mid \mathcal{G}) \leqslant \mathsf{E}(X_k \mid \mathcal{G})$ для всех $k \geqslant n$ и, следовательно,

$$\mathsf{E}(Y_n \mid \mathcal{G}) \leqslant \inf_{k \geqslant n} \mathsf{E}(X_k \mid \mathcal{G}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \text{ п. н.}$$

По теореме 4.4 получаем:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n \mid \mathcal{G}) &= \mathsf{E}(\lim_{n\to\infty} Y_n \mid \mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}(Y_n \mid \mathcal{G}) \leqslant \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \text{ п. н.} \end{aligned}$$

□

Теорема 4.6 (теорема Лебега о мажорируемой сходимости условных математических ожиданий)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность случайных величин таких, что* $X_n \to X$ *п. н.,* $|X_n| \leqslant Y$ *п. н.,* $\mathsf{E}Y < \infty$. *Тогда*

$$\mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \to \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) \text{ п. н. и } \mathsf{E}(|X_n - X| \mid \mathcal{G}) \to 0 \text{ п. н.}$$

Доказательство

Обозначим $Y_n = Y - X_n$. Тогда $Y_n \geqslant 0$ и $Y_n \to Y - X$ п. н. По теореме 4.5 имеем:

$$\mathsf{E}(Y - X \mid \mathcal{G}) = \mathsf{E}(\liminf_{n\to\infty}(Y - X_n) \mid \mathcal{G}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}(Y - X_n \mid \mathcal{G}) \text{ п. н.},$$

откуда следует, что

$$\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \text{ п. н.}$$

Обозначим $Z_n = Y + X_n$. Тогда $Z_n \geqslant 0$ и $Z_n \to Y + X$ п. н.

Доказательство

Аналогично получаем:

$$\mathsf{E}(Y + X \mid \mathcal{G}) = \mathsf{E}(\liminf_{n\to\infty}(Y + X_n) \mid \mathcal{G}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}(Y + X_n \mid \mathcal{G}) \text{ п. н.},$$

т. е.

$$\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \text{ п. н.}$$

Таким образом,

$$\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \leqslant \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) \text{ п. н.},$$

откуда следует сходимость $\mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{G}) \to \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$ п. н.

Доказательство

Так как $|X_n| \leqslant Y$ п. н., то и $|X| \leqslant Y$ п. н. Тогда $|X_n - X| \to 0$ п. н. и $|X_n - X| \leqslant 2Y$ п н. Значит, по только что доказанному, $\mathsf{E}(|X_n - X| \mid \mathcal{G}) \to 0$ п. н. $\square$

Лемма 4.5

Пусть случайная величина Z измерима относительно $\mathcal{G}$, $\mathsf{E}|X| < \infty$ и $\mathsf{E}|XZ| < \infty$. Тогда

$$\mathsf{E}(XZ \mid \mathcal{G}) = Z\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) \text{ п. н.}$$

Доказательство

Пусть $X \geqslant 0$. Если $Z = I_A$ для некоторого $A \in \mathcal{G}$, то $A \cap B \in \mathcal{G}$ для любого $B \in \mathcal{G}$ и

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big(Z\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})I_B\big) &= \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})I_{A\cap B}\big) = \mathsf{E}(XI_{A\cap B}) = \\ &= \mathsf{E}\big((XI_A)I_B\big) = \mathsf{E}(XZI_B).\end{aligned}$$

Отсюда получаем, в силу линейности условного математического ожидания, справедливость утверждения леммы в случае, когда Z — простая случайная величина.

Доказательство

Пусть $Z \geqslant 0$ и пусть $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность простых неотрицательных случайных величин таких, что $Z_n \uparrow Z$ п. н. при $n \to \infty$. Тогда $0 \leqslant Z_n X \uparrow ZX$ п. н. и

$$\mathsf{E}(Z_n X \mid \mathcal{G}) = Z_n \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) \uparrow Z\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}) \text{ п. н. при } n \to \infty.$$

С другой стороны, по теореме 4.4 имеет место сходимость $\mathsf{E}(Z_n X \mid \mathcal{G}) \uparrow \mathsf{E}(ZX \mid \mathcal{G})$ п. н. при $n \to \infty$. Отсюда следует равенство $\mathsf{E}(XZ \mid \mathcal{G}) = Z\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$ п. н. для неотрицательных X и Z.
Пусть теперь X и Z — произвольные случайные величины. Тогда используя разложения $X = X^+ - X^-$ и $Z = Z^+ - Z^-$, из доказанного выше для неотрицательных величин получим требуемое равенство. $\square$

Условные математические ожидания

Лемма 4.6

Если $\mathsf{E}X^2 < \infty$*, то* $\mathsf{E}(X - \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}))^2 = \mathsf{E}X^2 - \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})\big)^2$.

Доказательство

Обозначим $Y = \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})$. Применяя последовательно формулу полной вероятности (п. 5 леммы 4.2) и лемму 4.5, получаем:

$$\mathsf{E}\big(X\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})\big) = \mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(XY \mid \mathcal{G})) = \mathsf{E}(Y\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathsf{E}Y^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X - \mathsf{E}(X \mid \mathcal{G}))^2 &= \mathsf{E}(X - Y)^2 = \mathsf{E}X^2 - 2\mathsf{E}(XY) + \mathsf{E}Y^2 = \\ &= \mathsf{E}X^2 - \mathsf{E}Y^2 = \mathsf{E}X^2 - \mathsf{E}\big(\mathsf{E}(X \mid \mathcal{G})\big)^2. \end{aligned}$$

$\square$