

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2025

- 1 Основные понятия теории вероятностей
- 2 Цепи Маркова
- 3 Мартингалы
 - Теоремы сходимости
 - Равномерно интегрируемые мартингалы

Теоремы сходимости

Пусть $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ — последовательность случайных величин, $a < b$. Положим $\tau_1 = \min\{n \geq 0: X_n \leq a\}$ и для любого $k \geq 1$

$$\tau_{2k} = \min\{n > \tau_{2k-1}: X_n \geq b\},$$

и

$$\tau_{2k+1} = \min\{n > \tau_{2k}: X_n \leq a\}$$

причём $\tau_{2k+1} = +\infty$, если $\{n > \tau_{2k}: X_n \leq a\} = \emptyset$, и $\tau_{2k} = +\infty$, если $\{n > \tau_{2k-1}: X_n \geq b\} = \emptyset$.

Теоремы сходимости

Обозначим

$$U_n(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_2 > n, \\ \max\{k \geq 1 : \tau_{2k} \leq n\}, & \text{если } \tau_2 \leq n. \end{cases}$$

$U_n(a, b)$ — число пересечений полосы (a, b) снизу вверх последовательностью $\{X_n\}_{n \geq 0}$ за промежуток времени от 0 до n .

Нетрудно видеть, что $U_n(a, b) \nearrow U(a, b) = \sup\{k \geq 1 : \tau_{2k} < \infty\}$.

Напомним, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ существует в $\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда $U(a, b) < \infty$ для любых $a, b \in \mathbb{Q}$ таких, что $a < b$.

Теорема 3.14 (Дуб)

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ — субмартингал и пусть $a < b$. Тогда

$$\mathbb{E}U_n(a, b) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n - a)^+ - \mathbb{E}(X_0 - a)^+}{b - a} \leq \frac{\mathbb{E}(X_n - a)^+}{b - a}.$$

Доказательство

Определим последовательность H_n следующим образом: пусть $H_0 = 0$, $H_1 = \mathbf{I}\{X_0 \leq a\}$ и

$$H_n = \mathbf{I}\{X_{n-1} \leq b\}\mathbf{I}\{H_{n-1} = 1\} + \mathbf{I}\{X_{n-1} \leq a\}\mathbf{I}\{H_{n-1} = 0\}, \quad n \geq 2.$$

Нетрудно заметить, что последовательность $\{H_n, \mathcal{F}_{n-1}\}_{n \geq 0}$ предсказуема и $H_n \in \{0, 1\}$.

Рассмотрим последовательность $Y_n = a + (X_n - a)^+$. Так как $\{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ — субмартингал, то и $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ также образует субмартингал. Отметим, что число пересечений полосы (a, b) снизу вверх последовательностью $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ и последовательностью $\{X_n\}_{n \geq 0}$ одинаковое.

Доказательство

Обозначим $Z_n = \sum_{k=1}^n H_k(Y_k - Y_{k-1})$ и $V_n = \sum_{k=1}^n (1 - H_k)(Y_k - Y_{k-1})$.

Тогда $Z_n \geq (b - a)U_n$ и $Y_n - Y_0 = \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1}) = Z_n + V_n$.

Заметим также, что $\{V_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ — субмартингал в силу леммы 3.21.

Тогда $0 = EV_0 \leq EV_n$ и, следовательно,

$$(b - a)EU_n \leq EZ_n \leq E(Y_n - Y_0) = E(X_n - a)^+ - E(X_0 - a)^+.$$



Следствие 3.5

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ — супермартингал и пусть $a < b$. Тогда

$$\mathbb{E}U_n(a, b) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n - a)^-}{b - a}.$$

Доказательство

Имеет место следующее неравенство:

$$Z_n + (X_n - a)^- \geq Z_n \geq (b - a)U_n,$$

где величины Z_n определены в доказательстве теоремы 3.14.

Заметим, что $\{Z_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ — супермартингал. Тогда

$$0 = \mathbb{E}Z_0 \geq \mathbb{E}Z_n \geq (b - a)\mathbb{E}U_n - \mathbb{E}(X_n - a)^-.$$



Теорема 3.15

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ — субмартингал такой, что $\sup_{n \geq 0} E|X_n| < \infty$.

Тогда существует случайная величина X_∞ такая, что

$P(|X_\infty| < \infty) = 1$, $E|X_\infty| < \infty$ и $X_n \rightarrow X_\infty$ п. н.

Доказательство

Предположим, что $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n > \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) > 0$. Заметим, что

$$\{\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n > \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n\} = \bigcup_{a < b; a, b \in \mathbb{Q}} \{\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n > b > a > \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n\}.$$

Тогда найдутся $a, b \in \mathbb{Q}$ такие, что

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n > b > a > \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) > 0. \quad (3.17)$$

Теоремы сходимости

Доказательство

Пусть $U_n(a, b)$ — число пересечений полосы (a, b) снизу вверх последовательностью X_0, X_1, \dots, X_n , и пусть $U(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(a, b)$.

Тогда

$$EU_n \leq \frac{E(X_n - a)^+}{b - a} \leq \frac{E|X_n| + |a|}{b - a} \leq \frac{\sup_{n \geq 0} E|X_n| + |a|}{b - a} < \infty,$$

поскольку $(x - y)^+ \leq |x| + |y|$.

Так как $U_n \nearrow U$ и величины EU_n равномерно ограничены, то $EU_n \rightarrow EU < \infty$, что противоречит (3.17).

Следовательно, с вероятностью 1 существует $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_\infty$.

В силу леммы Фату $E|X_\infty| \leq \sup_n E|X_n| < \infty$, и, в частности,

$$P(|X_\infty| < \infty) = 1.$$



Следствие 3.6

Если $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ — неположительный мартингал (субмартингал) или неотрицательный мартингал (супермартингал), то существует случайная величина X_∞ такая, что $P(|X_\infty| < \infty) = 1$, $E|X_\infty| < \infty$ и $X_n \rightarrow X_\infty$ п. н.

Доказательство

Заметим, что если X — неположительный мартингал или субмартингал, то $X_n^+ = 0$. Если X — неотрицательный мартингал или супермартингал, то $-X$ — неположительный мартингал или субмартингал. □

Определение 3.12

Семейство случайных величин $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ называется *равномерно интегрируемым*, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{E}(|X_\alpha|; |X_\alpha| \geq N) = 0.$$

Определение 3.13

Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ называется *равномерно интегрируемой*, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}(|X_n|; |X_n| \geq N) = 0.$$

Лемма 3.26

Если последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируема, то $\sup_{n \geq 1} E|X_n| < \infty$.

Доказательство

Выберем N настолько большим, чтобы $\sup_{n \geq 1} E(|X_n|; |X_n| \geq N) \leq 1$.

Тогда

$$\sup_{n \geq 1} E|X_n| \leq \sup_{n \geq 1} E(|X_n|; |X_n| < N) + \sup_{n \geq 1} E(|X_n|; |X_n| \geq N) \leq N + 1 < \infty.$$



Лемма 3.27

Если $|X_n| \leq X$ п. н. для всех $n \geq 1$ и $EX < \infty$, то последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируема.

Доказательство

Действительно, так как $|X_n| \leq X$ п. н., то $|X_n| \mathbf{I}(|X_n| \geq N) \leq X \mathbf{I}(X \geq N)$ п. н. для всех $n \geq 1$ и $N > 0$. Так как $EX < \infty$, то $E(X \mathbf{I}(X \geq N)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно

$$\sup_{n \geq 1} E|X_n| \mathbf{I}(|X_n| \geq N) \leq E(X \mathbf{I}(X \geq N)) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$



Следствие 3.7

Если $E(\sup_{n \geq 1} |X_n|) < \infty$, то последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируема.

Лемма 3.28

Пусть последовательность положительных случайных величин $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируема. Если $|X_n| \leq Y_n$ п. н. для всех $n \geq 1$, то последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируема.

Доказательство

Утверждение леммы следует из соотношения

$$|X_n| \mathbf{I}(|X_n| \geq N) \leq Y_n \mathbf{I}(Y_n \geq N) \text{ п. н.}$$

для всех $n \geq 1$ и $N > 0$. □

Лемма 3.29

Пусть последовательности случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ и $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируемы. Тогда последовательности $\{\max(X_n, Y_n)\}_{n \geq 1}$ и $\{X_n + Y_n\}_{n \geq 1}$ также равномерно интегрируемы.

Доказательство

Упражнение.

Лемма 3.30

Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируема тогда и только тогда, когда $\sup_{n \geq 1} E|X_n| < \infty$ и

$$\sup_{n \geq 1} E(|X_n| \mathbf{I}_A) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad P(A) \rightarrow 0. \quad (3.18)$$

Доказательство

Необходимость. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — равномерно интегрируема. Тогда $\sup_{n \geq 1} E|X_n| < \infty$ в силу леммы 3.26.

Далее, для произвольного события A имеем:

$$\begin{aligned} E(|X_n| \mathbf{I}_A) &= E(|X_n| \mathbf{I}_A \mathbf{I}\{|X_n| \geq N\}) + E(|X_n| \mathbf{I}_A \mathbf{I}\{|X_n| < N\}) \leq \\ &\leq E(|X_n| \mathbf{I}\{|X_n| \geq N\}) + NP(A). \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем N настолько большим, чтобы $E(|X_n| \mathbf{I}\{|X_n| \geq N\}) < \varepsilon/2$ для всех $n \geq 1$. Тогда $\sup_{n \geq 1} E(|X_n| \mathbf{I}_A) < \varepsilon$, если $P(A) < \varepsilon/(2N)$.

Равномерно интегрируемые мартингалы

Доказательство

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть $\delta > 0$ такое, что $P(A) < \delta$. Положим $A_n = \{|X_n| \geq N\}$. Так как $\sup_{n \geq 1} E|X_n| < \infty$, то, применив неравенство Маркова, получаем:

$$\sup_{n \geq 1} P(A_n) \leq \frac{\sup_{n \geq 1} E|X_n|}{N} < \delta$$

для достаточно больших N . Из условия (3.18) следует, что

$$\sup_{n \geq 1} E(|X_n| \mathbf{I}(|X_n| \geq N)) = \sup_{n \geq 1} E(|X_n| \mathbf{I}_{A_n}) < \varepsilon$$

для достаточно больших N , что и означает равномерную интегрируемость последовательности $\{X_n\}_{n \geq 1}$. □

Лемма 3.31 (Валле Пуссен)

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность интегрируемых случайных величин, и пусть существует неотрицательная возрастающая функция g такая, что $g(t)/t \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ и $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}g(|X_n|) < \infty$. Тогда $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — равномерно интегрируема.

Доказательство

Пусть $\varepsilon > 0$, $M = \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}g(|X_n|)$, $a = M/\varepsilon$. Выберем N столь большим, что $g(t)/t \geq a$ при $t \geq N$. Тогда

$$\mathbb{E}(|X_n| \mathbf{I}\{|X_n| \geq N\}) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(g(|X_n|) \mathbf{I}\{|X_n| \geq N\}) \leq \frac{\mathbb{E}g(|X_n|)}{a} \leq \frac{M}{a} = \varepsilon.$$



Положив $g(t) = t^p$ в лемме 3.31, получаем следующее утверждение.

Следствие 3.8

Если $\sup_{n \geq 1} E|X_n|^p < \infty$ для некоторого $p > 1$, то последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируема.

Теорема 3.16

Пусть $X_n \xrightarrow{P} X$ и $E|X_n| < \infty$ для всех $n \geq 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируема;
- (ii) $E|X_n - X| \rightarrow 0$ и $E|X| < \infty$;
- (iii) $E|X_n| \rightarrow E|X| < \infty$.

Равномерно интегрируемые мартингалы

Доказательство

Пусть последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируема. Тогда $\sup_{n \geq 1} E|X_n| < \infty$ в силу леммы 3.26. Далее, из сходимости по вероятности следует, что существует подпоследовательность $\{n_k\}_{k \geq 1}$ такая, что $X_{n_k} \rightarrow X$ п. н. Следовательно, в силу леммы Фату имеем:

$$E|X| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E|X_{n_k}| \leq \sup_{n \geq 1} E|X_n| < \infty.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} E|X_n - X| &= E(|X_n - X| \mathbf{I}(|X_n - X| < \varepsilon)) + \\ &+ E(|X_n - X| \mathbf{I}(|X_n - X| \geq \varepsilon)) \leq \\ &\leq \varepsilon + E(|X_n - X| \mathbf{I}(|X_n - X| \geq \varepsilon)). \end{aligned}$$

Доказательство

Так как $|X_n - X| \leq |X_n| + |X|$, то из лемм 3.28 и 3.29 следует, что последовательность $\{|X_n - X|\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируема. А так как $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$, то из леммы 3.30 получаем:

$$E(|X_n - X| \mathbf{I}(|X_n - X| \geq \varepsilon)) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E|X_n - X| < \varepsilon,$$

что, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, доказывает сходимость $E|X_n - X| \rightarrow 0$.

Равномерно интегрируемые мартингалы

Доказательство

Пусть $E|X_n - X| \rightarrow 0$ и $E|X| < \infty$. Тогда из неравенства треугольника получаем:

$$|E|X_n| - E|X|| \leq E||X_n| - |X|| \leq E|X_n - X| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть $E|X_n| \rightarrow E|X| < \infty$. Докажем равномерную интегрируемость последовательности $\{X_n\}_{n \geq 1}$.

Пусть $N > 1$. Рассмотрим непрерывную и ограниченную на всей прямой функцию $\varphi_N(x)$:

$$\varphi_N(x) = |x|\mathbf{I}(|x| < N - 1) + (N - 1)(N - |x|)\mathbf{I}(N - 1 \leq |x| < N).$$

Заметим, что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$|x|\mathbf{I}(|x| \geq N) \leq |x| - \varphi_N(x) \leq |x|\mathbf{I}(|x| \geq N - 1). \quad (3.19)$$

Доказательство

Так как $E|X| < \infty$, то $E(|X|\mathbf{I}(|X| \geq N - 1)) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.
Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $n_1 = n_1(\varepsilon)$ такой, что для всех $N \geq n_1$

$$E|X| - E\varphi_N(X) < \varepsilon/2.$$

Далее, так как $X_n \xrightarrow{p} X$ и функция $\varphi_N(x)$ непрерывна, то $\varphi_N(X_n) \xrightarrow{p} \varphi_N(X) \leq N - 1$. Отсюда следует, что $E\varphi_N(X_n) \rightarrow E\varphi_N(X)$.
А так как $E|X_n| \rightarrow E|X|$, то

$$E|X_n| - E\varphi_N(X_n) \rightarrow E|X| - E\varphi_N(X).$$

Доказательство

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $n_2 = n_2(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geq n_2$

$$E|X_n| - E\varphi_N(X_n) \leq E|X| - E\varphi_N(X) + \varepsilon/2.$$

Из соотношения (3.19) окончательно получаем, что для всех $N \geq n_1$ и всех $n \geq n_2$

$$E(|X_n|\mathbf{I}(|X_n| \geq N)) \leq E|X_n| - E\varphi_N(X_n) < \varepsilon.$$

Так как $E|X_n| < \infty$ для всех $n \geq 1$, то можно выбрать $N \geq n_1$ так, чтобы

$$E(|X_n|\mathbf{I}(|X_n| \geq N)) < \varepsilon$$

для всех $1 \leq n < n_2$.

Доказательство

Итак, любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для всех $N \geq n_0$

$$\sup_{n \geq 1} \mathbf{E}(|X_n| \mathbf{I}(|X_n| \geq N)) < \varepsilon,$$

что и доказывает равномерную интегрируемость последовательности $\{X_n\}_{n \geq 1}$. □

Равномерно интегрируемые мартингалы

Определение 3.14

Мартингал (субмартингал или супермартингал) $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ называется *равномерно интегрируемым*, если последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 0}$ равномерно интегрируема.

Лемма 3.32

Пусть $E|X| < \infty$. Тогда семейство случайных величин

$$\{E(X \mid G) : G \subseteq \mathcal{F}\}$$

является *равномерно интегрируемым*. В частности, мартингал Леви является *равномерно интегрируемым*.

Равномерно интегрируемые мартингалы

Доказательство

Из неравенства $|E(X | G)| \leq E(|X| | G)$ п. н. (п. 8 леммы 3.2) следует, что достаточно проверить равномерную интегрируемость семейства $\{E(|X| | G) : G \subseteq \mathcal{F}\}$.

Обозначим $Y = E(|X| | G)$. Тогда случайная величина Y измерима относительно G и $B = \{Y \geq M\} \in G$. По определению условного математического ожидания $E(Y \mathbf{I}_B) = E(|X| \mathbf{I}_B)$. Применив неравенство Маркова $P(B) \leq \frac{EY}{M}$, получим оценку:

$$\begin{aligned} EY \mathbf{I}_B &= E|X| \mathbf{I}_B = E(|X| \mathbf{I}_B \mathbf{I}\{|X| > N\}) + E(|X| \mathbf{I}_B \mathbf{I}\{|X| < N\}) \\ &\leq (E|X| \mathbf{I}\{|X| \geq N\}) + NP(B) \leq E(|X| \mathbf{I}\{|X| \geq N\}) + \frac{N}{M} EY. \end{aligned}$$

Выберем N достаточно большим, чтобы $E(|X| \mathbf{I}\{|X| \geq N\}) \leq \varepsilon/2$.

Затем выберем M настолько большим, чтобы $\frac{N}{M} EY < \varepsilon/2$. □

Теорема 3.17

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ — равномерно интегрируемый субмартингал. Тогда существует интегрируемая случайная величина X_∞ такая, что $X_n \rightarrow X_\infty$ п. н. и $E|X_n - X_\infty| \rightarrow 0$.

Доказательство

Существование предела $X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ п. н. следует из теоремы 3.15. Сходимость $E|X_n - X_\infty| \rightarrow 0$ следует из теоремы 3.16. □

Следствие 3.9

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ — субмартингал такой, что $\sup_{n \geq 0} E|X_n|^p < \infty$ для некоторого $p > 1$. Тогда существует интегрируемая случайная величина X_∞ такая, что $X_n \rightarrow X_\infty$ п. н. и $E|X_n - X_\infty| \rightarrow 0$.

Теорема 3.18

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ — равномерно интегрируемый мартингал. Тогда существует интегрируемая случайная величина X_∞ такая, что $X_n \rightarrow X_\infty$ п. н. и $E|X_n - X_\infty| \rightarrow 0$. Более того, $X_n = E(X_\infty | \mathcal{F}_n)$ п. н.

Доказательство

Мартингал является субмартингалом, поэтому первая часть теоремы следует из теоремы 3.17. Измеримость относительно \mathcal{F}_n случайной величины X_n следует из условия. Проверим, что $E(X_n \mathbf{I}_B) = E(X_\infty \mathbf{I}_B)$ для любого $B \in \mathcal{F}_n$.

Так как X — мартингал, то $E(X_m | \mathcal{F}_n) = X_n$ для любого $m \geq n$, то есть $E(X_m \mathbf{I}_B) = E(X_n \mathbf{I}_B)$ для любого $m \geq n$ и для любого $B \in \mathcal{F}_n$. Отсюда получаем:

$$|E(X_n \mathbf{I}_B) - E(X_\infty \mathbf{I}_B)| = |E(X_m \mathbf{I}_B) - E(X_\infty \mathbf{I}_B)| \leq E|X_m - X_\infty| \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, $E(X_n \mathbf{I}_B) = E(X_\infty \mathbf{I}_B)$. □