СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2025

Оглавление

1. Основные понятия теории вероятностей
2. Цепи Маркова
3. Мартингалы
   - Основные неравенства

Основные неравенства

Обозначим $X_n^* = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |X_j|$, $||X_n||_p = (\mathsf{E}|X_n|^p)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$.

Теорема 3.12 (неравенство Дуба)

Пусть $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— субмартингал. Тогда для любого* $x > 0$ *и всех* $n \geqslant 0$

$$x\mathsf{P}\Big(\max_{0 \leqslant j \leqslant n} X_j \geqslant x\Big) \leqslant \mathsf{E}(X_n; \max_{0 \leqslant j \leqslant n} X_j \geqslant x) \leqslant \mathsf{E}X_n^+. \qquad (3.8)$$

Основные неравенства

Доказательство

Рассмотрим события $A = \{\max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} X_j \geqslant x\}$, $B_0 = \{X_0 \geqslant x\}$ и $B_k = \{X_0 < x, \ldots, X_{k-1} > x, X_k \geqslant x\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда события $B_0, B_1, \ldots, B_n$ попарно несовместны и $A = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$.

Так как X — субмартингал и $B_k \in \mathcal{F}_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, то для всех $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X_n I_{B_k}) &= \mathsf{E}\mathsf{E}(X_n I_{B_k} \mid \mathcal{F}_k) = \mathsf{E}(I_{B_k} \mathsf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_k)) \geqslant \\ &\geqslant \mathsf{E}(I_{B_k} X_k) \geqslant x \mathsf{P}(B_k). \end{aligned}$$

Суммируя по $k = 0, 1, \ldots, n$, получаем:

$$\mathsf{E}(X_n I_A) \geqslant x \mathsf{P}(A).$$

$\square$

Следствие 3.3

Пусть $M = \{M_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *—* L_p*-мартингал для некоторого* $p \geqslant 1$*. Тогда для всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}(M_n^* \geqslant x) \leqslant \frac{1}{x^p} \mathsf{E}(|M_n|^p; M_n^* \geqslant x) \leqslant \frac{\mathsf{E}|M_n|^P}{x^p}. \tag{3.9}$$

Основные неравенства

Лемма 3.24

Пусть X — *случайная величина. Тогда для любого* $p > 0$

$$\mathsf{E}|X|^p = p \int\limits_0^\infty t^{p-1} \mathsf{P}(|X| \geqslant t)\, dt. \tag{3.10}$$

Доказательство

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}|X|^p &= \int\limits_0^{|X|} p t^{p-1}\, dt = \mathsf{E} \int\limits_0^\infty p t^{p-1} \mathbf{I}(|X| \geqslant t)\, dt = \\
&= \int\limits_0^\infty p t^{p-1} \mathsf{E}\mathbf{I}(|X| \geqslant t)\, dt = p \int\limits_0^\infty t^{p-1} \mathsf{P}(|X| \geqslant t)\, dt. \quad \square
\end{aligned}$$

Основные неравенства

Лемма 3.25

Пусть X *и* Y *неотрицательные случайные величины такие, что для всех* $t > 0$

$$\mathsf{P}(Y \geqslant t) \leqslant \frac{1}{t}\,\mathsf{E}(X; Y \geqslant t). \tag{3.11}$$

Тогда

$$\mathsf{E}Y \leqslant \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1}\,\mathsf{E}(X \ln^+ X) \tag{3.12}$$

и для всех $p > 1$

$$\mathsf{E}Y^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{E}X^p. \tag{3.13}$$

Доказательство

Пусть $p > 1$. Предположим, что $\mathsf{E}Y^p < \infty$. Тогда из (3.10) и (3.11) получаем:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}Y^p &= p\int\limits_0^\infty t^{p-1}\mathsf{P}(Y \geqslant t)\,dt \leqslant p\int\limits_0^\infty t^{p-2}\mathsf{E}(X; Y \geqslant t)\,dt = \\ &= p\,\mathsf{E}\int\limits_0^\infty X\cdot\mathbf{I}(Y \geqslant t)t^{p-2}\,dt = \frac{p}{p-1}\,\mathsf{E}(XY^{p-1}). \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера, имеем:

$$\mathsf{E}Y^p \leqslant \frac{p}{p-1}\,\mathsf{E}(XY^{p-1}) \leqslant \frac{p}{p-1}\,(\mathsf{E}X^p)^{1/p}(\mathsf{E}Y^p)^{(p-1)/p},$$

откуда следует неравенство (3.13).

Доказательство

Пусть $\mathsf{E}Y^p = \infty$. Рассмотрим случайную величину $Z_N = \min\{Y, N\}$, где $N > 0$. Заметим, что при $t \leqslant N$

$$\mathsf{P}(Z_N \geqslant t) = \mathsf{P}(Y \geqslant t) \leqslant \frac{1}{t}\mathsf{E}(X; Y \geqslant t) = \frac{1}{t}\mathsf{E}(X; Z_N \geqslant t),$$

и при $t > N$

$$\mathsf{P}(Z_N \geqslant t) = 0 = \frac{1}{t}\mathsf{E}(X; Z_N \geqslant t).$$

Таким образом, ограниченная случайная величина Z_N также удовлетворяет неравенству (3.11). Значит, по только что доказанному, получаем:

$$\mathsf{E}Z_N^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{E}X^p.$$

Доказательство

Так как $0 \leqslant Z_N \leqslant Z_{N+1}$ и $Z_N(\omega) \to Y(\omega)$ для каждого ω при $N \to \infty$, то по теореме о монотонной сходимости

$$\mathsf{E}Y^p = \lim_{N\to\infty} \mathsf{E}Z_N^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{E}X^p.$$

Пусть теперь $p = 1$. Используя (3.10) и (3.11), получаем:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}Y &= \int_0^\infty \mathsf{P}(Y \geqslant t)\,dt \leqslant 1 + \int_1^\infty \mathsf{P}(Y \geqslant t)\,dt \leqslant 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t}\mathsf{E}(X; Y \geqslant t)\,dt = \\
&= 1 + \mathsf{E}\int_1^\infty \frac{1}{t} X \cdot \mathbf{I}(\max\{Y,1\} \geqslant t)\,dt = 1 + \mathsf{E}\int_1^{\max\{Y,1\}} \frac{X}{t}\,dt = \\
&= 1 + \mathsf{E}(X \ln^+ Y).
\end{aligned}$$

Основные неравенства

Доказательство

Для завершения доказательства осталось воспользоваться следующим неравенством:

$$a \ln^+ b \leqslant a \ln^+ a + b/e, \quad a, b > 0. \tag{3.14}$$

Из (3.14) следует, что

$$\mathsf{E}Y \leqslant 1 + \mathsf{E}(X \ln^+ Y) \leqslant 1 + \mathsf{E}(X \ln^+ X) + \mathsf{E}Y/e.$$

Отсюда получаем неравенство (3.12).

Доказательство

Докажем неравенство (3.14).
Если $0 < a, b \leqslant 1$, то левая часть (3.14) равна нулю и доказывать нечего. Если $a > b$, то неравенство (3.14) тривиально.
Пусть $a \leqslant 1 < b$. Тогда используя легко проверяемое неравество $\ln x \leqslant x/e$ при $x \geqslant 1$, получаем:

$$a \ln^+ b = a \ln b \leqslant \ln b \leqslant b/e = a \ln^+ a + b/e.$$

Если $1 < a < b$, то аналогично получаем:

$$a \ln^+ b = a \ln b = a \ln a + a \ln(b/a) \leqslant a \ln^+ a + a \frac{b/a}{e} = a \ln^+ a + b/e.$$

$\square$

Основные неравенства

Теорема 3.13 (неравенства Дуба)

(i) *Если* $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— неотрицательный субмартингал, то*

$$\mathsf{E}\Big(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} X_k\Big)^p \leqslant \begin{cases} \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{E} X_n^p, & \text{если } p > 1, \\ \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1}\,\mathsf{E}(X_n \ln^+ X_n), & \text{если } p = 1. \end{cases} \tag{3.15}$$

(ii) *Если* $M = \{M_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— мартингал, то*

$$\mathsf{E}\Big(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} |M_k|\Big)^p \leqslant \begin{cases} \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{E}|M_n|^p, & \text{если } p > 1, \\ \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1}\,\mathsf{E}(|M_n| \ln^+ |M_n|), & \text{если } p = 1. \end{cases} \tag{3.16}$$

Положив $p = 2$ в теореме 3.13, получим следующее утверждение.

Следствие 3.4

Пусть $M = \{M_n, \mathcal{F}_n\}_{n \geqslant 0}$ *— мартингал. Тогда*

$$\mathsf{P}(M_n^* \geqslant x) \leqslant \frac{\mathsf{E} M_n^2}{x^2} \quad \text{для любого} \quad x > 0$$

и

$$\mathsf{E} \max_{0 \leqslant j \leqslant n} M_j^2 \leqslant 4 \mathsf{E} M_n^2.$$