СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2024

Оглавление

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ — однородная цепь Маркова с множеством состояний S и матрицей переходных вероятностей P.
Пусть π — распределение вероятностей на множестве состояний S, то есть $\pi_j \geqslant 0$ для всех $j \in S$ и $\sum\limits_{j\in S} \pi_j = 1$.

Определение 2.14

Распределение π называется *стационарным*, если $\pi P = \pi$.

Эргодичность

Теорема 2.7

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ *— однородная цепь Маркова с конечным множеством состояний* $S = \{1, 2, \ldots, m\}$*, и пусть* $p_{i,j} > 0$ *для всех* $i, j \in S$*. Тогда существует единственное стационарное распределение* π*, причём* $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n)$ *для любых* $i, j \in S$*. Более того, существует* $0 < r < 1$ *такое, что*

$$|\pi_j - p_{i,j}(n)| \leqslant 2r^n$$

для любых $i, j \in S$ *и всех* $n \geqslant 1$*.*

Эргодичность

Доказательство

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ Положим $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_m|$. Очевидно, что $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^m$. Определим оператор в пространстве $\mathbb{R}^m$: для каждого $x \in \mathbb{R}^m$ положим $Tx = xP$. Обозначим $X = \{x \in \mathbb{R}^m \colon x_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1\}$. Пусть $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant m} p_{i,j}$.

Покажем, что

$$\|Tx - Ty\| \leqslant (1 - \delta m)\|x - y\|$$

для любых $x, y \in X$.

Пусть $z = x - y$. Тогда $Tx - Ty = xP - yP = (x - y)P = zP = Tz$ и

$$(Tz)_j = \sum_{i=1}^{m} p_{i,j} z_i = \sum_{i=1}^{m} (p_{i,j} - \delta) z_i + \delta \sum_{i=1}^{m} z_i = \sum_{i=1}^{m} (p_{i,j} - \delta) z_i,$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{m} z_i = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i - \sum\limits_{i=1}^{m} y_i = 0$.

Эргодичность

Доказательство

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\|Tz\| &= \sum_{j=1}^{m}\left|\sum_{i=1}^{m}(p_{i,j}-\delta)z_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(p_{i,j}-\delta)|z_i| = \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(|z_i|\sum_{j=1}^{m}(p_{i,j}-\delta)\right) = \\
&= (1-\delta m)\sum_{i=1}^{m}|z_i| = (1-\delta m)\|z\| = (1-\delta m)\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Эргодичность

Доказательство

Определим последовательность распределений $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$, $x_n \in X$, следующим образом. Пусть x_0 — распределение цепи в момент времени n, при $n \geqslant 1$ положим $x_n = Tx_{n-1}$, то есть x_n — распределение цепи в момент времени n. Обозначим $r = 1 - \delta m$. Из оценки для $T(x-y)$ получаем ($x_n(i)$ — i-тая координата вектора x_n) для всех $i = 1, \dots, m$ и $k, n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} |x_n(i) - x_{k+n}(i)| &\leqslant \|x_n - x_{k+n}\| = \|Tx_{n-1} - Tx_{k+n-1}\| \leqslant \\ &\leqslant r\|x_{n-1} - x_{k+n-1}\| \leqslant \ldots \leqslant r^n\|x_0 - x_k\| \leqslant \\ &\leqslant r^n(\|x_0\| + \|x_k\|) = 2r^n. \end{aligned}$$

Доказательство

Отсюда следует, что для каждого $i = 1, \ldots, m$ последовательность $\{x_n(i)\}_{n \geqslant 0}$ является фундаментальной и, значит, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(i)$. Обозначим это предел π_i. Тогда, очевидно, $\pi_i \geqslant 0$ для каждого $i = 1, \ldots, m$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} \pi_i = 1$.

Перейдя в неравенстве $|x_n(i) - x_{k+n}(i)| \leqslant 2r^n$ к пределу при $k \to \infty$, получаем:

$$|x_n(i) - \pi_i| \leqslant 2r^n,$$

для каждого $i = 1, \ldots, m$ и всех $n \geqslant 1$. Следовательно, $\|x_n - \pi\| \leqslant 2mr^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство

Итак, с одной стороны $x_n \to \pi$ при $n \to \infty$. С другой, в силу очевидной непрерывности оператора T, имеем:

$$x_n = Tx_{n-1} \to T\pi = \pi P.$$

Значит, $\pi = \pi P$, то есть π — стационарное распределение. Возьмём в качестве начального такое распределение x_0, что $x_0(i) = 1$ и $x_0(j) = 0$ при $j \neq i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда $x_n(j) = p_{i,j}(n)$ и, значит, $p_{i,j}(n) \to \pi_j$ при $n \to \infty$ для любого $j = 1, \ldots, m$. Более того,

$$|p_{i,j}(n) - \pi_j| = |x_n(j) - \pi_j| \leqslant 2r^n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Эргодичность

Доказательство

Докажем единственность. Предположим, что существует другое распределение $\widetilde{\pi}$, для которого $\widetilde{\pi} P = \widetilde{\pi}$. Но тогда $\widetilde{\pi} P^n = \widetilde{\pi}$ для всех $n \geqslant 1$, то есть для любого $j \in S$ и всех $n \geqslant 1$

$$\widetilde{\pi}_j = \sum_{i \in S} \widetilde{\pi}_i p_{i,j}(n).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, учитывая доказанное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = \pi_j$, получаем:

$$\widetilde{\pi}_j = \sum_{i \in S} \widetilde{\pi}_i \pi_j = \pi_j \sum_{i \in S} \widetilde{\pi}_i = \pi_j.$$

$\square$

Замечание

Из теоремы 2.7, в частности, следует, что поведение цепи Маркова с течением времени стабилизируется: для любого $j \in S$

$$\mathsf{P}(X_n = j) = \sum_{i \in S} p_i p_{i,j}(n) \to \sum_{i \in S} p_i \pi_j = \pi_j,$$

где $p_i = \mathsf{P}(X_0 = i)$, $i \in S$.

Эргодичность

Определение 2.15

Цепь Маркова называется *эргодической*, если для любых $i, j \in S$ существуют не зависящие от i положительные пределы

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = \pi_j.$$