СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2024

Оглавление

Классификация состояний

Далее рассматриваем только однородные цепи Маркова.

Определение 3.6

Состояние $j \in S$ называется *несущественным*, если существует такое состояние $i \in S$ и число $n_0 \geqslant 1$, что $p_{j.i}(n_0) > 0$ и $p_{i,j}(n) = 0$ для любого $n \geqslant 1$.
В противном случае состояние $j \in S$ называется *существенным* состоянием.

Определение 3.7

Существенные состояния i и j называются *сообщающимися*, если существуют такие $m, n \geqslant 1$, что $p_{i,j}(m) > 0$ и $p_{j,i}(n) > 0$.

Классификация состояний

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ — однородная цепь Маркова. Выделим класс S^0 всех несущественных состояний. Пусть теперь $i \in S$ — какое-нибудь существенное состояние. Обозначим S_i класс состояний, включающий в себя i и все состояния, с ним сообщающиеся. Если $j \in S_i$, то состояние j существенно, сообщается с i. Следовательно, $S_i = S_j$. Таким образом, множество всех существенных состояний разбивается на непересекающиеся классы сообщающихся состояний так, что любые два состояния из одного класса сообщаются между собой.

Определение 3.8

Если класс S_i состоит из одного состояния i, то это состояние называется *поглощающим*.

Ясно, что если система попала в существенное состояние i, то она уже никогда не выйдет из класса S_i.

Определение 3.9

Цепь Маркова, состоящая из одного класса существенных сообщающихся состояний, называется *неразложимой* (*неприводимой*). Если цепь содержит более одного класса, то она называется *разложимой* (*приводимой*).

Классификация состояний

Введём обозначение для вероятности первого возвращения за n шагов в состояние $j \in S$:

$$f_j(n) = \mathsf{P}(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = j), \quad n \geqslant 1.$$

Вероятность возвращения в состояние $j \in S$ за конечное число шагов:

$$F_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n).$$

Определение 3.10

Состояние $j \in S$ называется *возвратным*, если $F_j = 1$, и *невозвратным*, если $F_j < 1$.

Определение 3.11

Состояние $j \in S$ называется *нулевым*, если $p_{j,j}(n) \to 0$ при $n \to \infty$, и *ненулевым* в противном случае.

Определение 3.12

Состояние $j \in S$ называется *периодическим*, с периодом d_j, если возвращение с положительной вероятностью в j возможно только за число шагов, кратное $d_j > 1$, и d_j есть наибольшее число, обладающее этим свойством.

Другими словами, d_j есть наибольший общий делитель (н. о. д.) множества чисел $\{n > 1 \colon p_{j,j}(n) > 0\}$. Отметим, что $p_{j,j}(n) = f_j(n) = 0$, если n не делится нацело на d_j.

Пример.
Рассмотрим блуждание частицы по целым точкам на вещественной прямой, задаваемое следующим образом: частица либо с вероятностью 1/2 сдвигается на единицу вправо, либо с той же вероятностью остается на месте. Здесь $f_j(1) = 1/2$, а для $n > 1$ $f_j(n) = 0$ для любой точки j. Поэтому $F_j < 1$, и все состояния невозвратны. Легко видеть, что $p_{j,j}(n) = 1/2^n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому все состояния нулевые.
Если же точка с вероятностью 1/2 смещается вправо и с той же вероятностью влево, то мы получим цепь с периодом 2, так как вернуться в любое фиксированное состояние можно лишь за чётное число шагов.

Лемма 3.8 (теорема Абеля)

1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *сходится, то существует предел*

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

2. *Если* $a_n \geqslant 0$ *для всех* $n \geqslant 0$, *то существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *и*

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Классификация состояний

Доказательство

Пусть $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $n \geqslant 0$, $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $0 < x < 1$.
Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$ при $1 - \delta < x < 1$.
Так как $a_0 = b_0$ и $a_n = b_n - b_{n-1}$, $n \geqslant 1$, то для любого $N > 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n x^n &= b_0 + \sum_{n=1}^{N} (b_n - b_{n-1}) x^n = b_0 + \sum_{n=1}^{N} b_n x^n - \sum_{n=1}^{N} b_{n-1} x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{N} b_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} b_n x^{n+1} = b_N x^N + \sum_{n=0}^{N-1} b_n (x^n - x^{n+1}) = \\
&= b_N x^N + (1 - x) \sum_{n=0}^{N-1} b_n x^n.
\end{aligned}$$

Доказательство

Пусть $0 < x < 1$. Тогда $b_N x^N \to 0$ при $N \to \infty$ и, значит,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Так как $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ при $0 < x < 1$, то $A = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A x^n$ и, следовательно,

$$\varphi(x) - A = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - A) x^n$$

при всех $0 < x < 1$.

Доказательство

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то $b_n \to A$ при $n \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $N \geqslant 1$ такое, что $|b_n - A| < \varepsilon/2$ для всех $n \geqslant N$. Тогда при $0 < x < 1$

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x) - A| &\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} |b_n - A| x^n = \\
&= (1-x)\sum_{n=0}^{N} |b_n - A| x^n + (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} |b_n - A| x^n \leqslant \\
&\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N} |b_n - A| + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \leqslant \\
&\leqslant (1-x)K + \varepsilon/2,
\end{aligned}
$$

Доказательство

где $K = \sum\limits_{n=0}^{N} |b_n - A|$.

Если $x > 1 - \varepsilon/(2K)$, то $(1-x)K < \varepsilon/2$. Значит, положив $\delta = \varepsilon/(2K)$, получаем $|\varphi(x) - A| \leqslant (1-x)K + \varepsilon/2 < \varepsilon$ при $1 - \delta < x < 1$, т. е. $\lim\limits_{x \to 1-0} \varphi(x) = A$.

Доказательство

Докажем второе утверждение леммы.

Пусть $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = +\infty$. Так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ при $0 < x < 1$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Классификация состояний

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n < +\infty$. Переходя в неравенстве

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

к пределу сначала при $x \to 1-0$, а потом при $N \to \infty$, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leqslant \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n < \infty.$$

Доказательство

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится и, значит, в силу первого утверждения леммы,

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

$\square$

Определение 3.13

Производящей функцией числовой последовательности $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ называется функция $\varphi(z)$ комплексного аргумента z, $|z| \leqslant 1$, определяемая равенством

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Теорема 3.3

Состояние $j \in S$ *возвратно тогда и только тогда, когда*

$$P_j = \sum_{n=1}^{\infty} p_{j,j}(n) = \infty.$$

Если состояние j *невозвратно, то*

$$F_j = \frac{P_j}{1 + Pj}. \tag{3.1}$$

Доказательство

Покажем, что последовательности $\{p_{j,j}(n)\}_{n\geqslant 1}$ и $\{f_j(n)\}_{n\geqslant 1}$ связаны следующим соотношением:

$$p_{j,j}(n) = f_j(n) + \sum_{k=1}^{n-1} f_j(k) p_{j,j}(n-k). \quad (3.2)$$

Рассмотрим события $E_1 = \{X_0 = j, X_n = j, X_1 = j\}$ и

$$E_k = \{X_0 = j, X_n = j, X_k = j, X_m \neq j, m = 1, 2, \ldots, k-1\},$$
$$k = 2, 3, \ldots, n.$$

Доказательство

Событие E_k состоит в том, что в моменты 0 и n цепь находится в состоянии j, и первое возвращение в состояние j происходит на k-м шаге. Тогда

$$\{X_0 = j, X_n = j\} = \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Так как события E_k попарно несовместны, то
$\mathsf{P}(X_0 = j, X_n = j) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{P}(E_k)$ и, следовательно,

$$p_{j,j}(n) = \mathsf{P}(X_n = j \mid X_0 = j) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(E_k \mid X_0 = j). \qquad (3.3)$$

Классификация состояний

Доказательство

Для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ найдём условную вероятность $\mathsf{P}(E_k \mid X_0 = j)$:

$$\mathsf{P}(E_k \mid X_0 = j) = \frac{\mathsf{P}(X_0 = j, X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j, X_n = j)}{\mathsf{P}(X_0 = j)} =$$

$$= \frac{\mathsf{P}(X_0 = j, X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j)}{\mathsf{P}(X_0 = j)} \times$$

$$\times \frac{\mathsf{P}(X_0 = j, X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j, X_n = j)}{\mathsf{P}(X_0 = j, X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j)} =$$

$$= \mathsf{P}(X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j \mid X_0 = j) \times$$

$$\times \mathsf{P}(X_n = j \mid X_0 = j, X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j) =$$

$$\overset{(2.1)}{=} \mathsf{P}(X_1 \neq j, \ldots, X_{k-1} \neq j, X_k = j \mid X_0 = j)\mathsf{P}(X_n = j \mid X_k = j) =$$

$$= f_j(k) p_{j,j}(n-k).$$

Доказательство

Таким образом, из (3.3) получаем:

$$p_{j,j}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_j(k) p_{j,j}(n-k) = f_j(n) + \sum_{k=1}^{n-1} f_j(k) p_{j,j}(n-k).$$

Классификация состояний

Доказательство

Рассмотрим производящие функции последовательностей $\{p_{j,j}(n)\}_{n\geqslant 1}$ и $\{f_j(n)\}_{n\geqslant 1}$:

$$P_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{j,j}(n) z^n, \quad F_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) z^n.$$

Оба ряда сходятся внутри единичного круга $|z| \leqslant 1$ и являются там аналитическими функциями.

Классификация состояний

Доказательство

Формула (3.2) после умножения обеих частей на z^n и суммирования по n приводит к равенству:

$$\begin{aligned} P_j(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{m=1}^{n} f_j(m) p_{j,j}(n-m) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} z^m \sum_{n=m}^{n} z^{n-m} f_j(m) p_{j,j}(n-m) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} z^m f_j(m) \sum_{k=0}^{n} z^k p_{j,j}(k) = F_j(z)(1+P_j(z)). \end{aligned}$$

Доказательство

Отсюда получаем:

$$F_j(z) = \frac{P_j(z)}{1 + P_j(z)}, \quad P_j(z) = \frac{F_j(z)}{1 - F_j(z)}.$$

Пусть $P_j = \infty$. Тогда $P_j(z) \to \infty$ при $z \to 1 - 0$ по лемме 3.8. Следовательно, $F_j(z) \to 1$. Так как $F_j(z) < F_j$ для вещественных $z < 1$, то $F_j = 1$.

Пусть $F_j = 1$. Тогда, ещё раз применяя лемму 3.8, получаем, что $F_j(z) \to 1$ при $z \to 1 - 0$, поэтому $P_j(z) \to \infty$. Значит, $P_j = \infty$. Если $P_j < \infty$, то при $z = 1$ получаем (3.1). □

Из теоремы 3.3 вытекает

Следствие 3.1

Невозвратное состояние всегда является нулевым.

Доказательство

Это очевидно, поскольку из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{j,j}(n) < \infty$ следует $p_{j,j}(n) \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Таким образом, на основании определений 3.10–3.12 можно было бы выделить в неразложимой цепи 8 возможных типов состояний (каждый из трех признаков может быть или не быть). Но на самом деле их оказывается меньше, так как невозвратные состояния автоматически являются нулевыми, а ненулевые — возвратными. Поэтому возможны лишь 6 типов состояний, которые описываются (i) классификацией по асимптотическим свойством вероятностей $p_{j,j}(n)$ (невозвратные состояния, возвратные нулевые, ненулевые) и (ii) классификацией по арифметическим свойствам вероятностей $p_{j,j}(n)$ или $f_j(n)$ (периодичность и непериодичность).

Теорема 3.4

Если состояние $j \in S$ является возвратным, то цепь Маркова с вероятностью 1 бесконечно много раз возвратится в j. Если это состояние невозвратно, то цепь Маркова с вероятностью 1 лишь конечное число раз побывает в состоянии j.

Доказательство

Пусть τ_k — момент k-го возвращения в состояние j, $k = 1, 2, \ldots$ Если за бесконечное число шагов происходит меньше k возвращений, то полагаем $\tau_k = +\infty$.

Событие $\{\tau_k < \infty\}$ означает, что произошло по меньшей мере k возвращений. Вероятность возвращения есть $\mathsf{P}(\tau_1 < \infty) = F_j$. При условии осуществления события $\{\tau_1 < \infty\}$ цепь через некоторое конечное число шагов τ_1 возвращается в исходное состояние j, после чего её дальнейшее поведение подчиняется тем же закономерностям, как если бы она только начинала своё движение. Таким образом, вероятность события $\{\tau_2 < \infty\}$ при условии, что $\{\tau_1 < \infty\}$, будет также равна F_j:

$$\mathsf{P}(\tau_2 < \infty \mid \tau_1 < \infty) = F_j.$$

Доказательство

Очевидно, если $\{\tau_1 = \infty\}$, то и $\{\tau_2 = \infty\}$. Поэтому

$$\mathsf{P}(\tau_2 < \infty) = \mathsf{P}(\tau_2 < \infty \mid \tau_1 < \infty)\mathsf{P}(\tau_1 < \infty) = F_j^2.$$

Совершенно аналогично, для любого $k \geqslant 1$

$$\mathsf{P}(\tau_k < \infty \mid \tau_{k-1} < \infty) = F_j, \quad \mathsf{P}(\tau_k < \infty) = F_j^k.$$

Классификация состояний

Доказательство

Невозвратность состояния j означает, что $F_j < 1$. В этом случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\tau_k < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} F_j^k < \infty,$$

и, согласно лемме Бореля — Кантелли, с вероятностью 1 может произойти лишь конечное число событий $\{\tau_k < \infty\}$, то есть с вероятностью 1 за бесконечное число шагов цепь Маркова лишь конечное число раз побывает в состоянии j.

Классификация состояний

Доказательство

Возвратность состояния j означает, что $F_j = 1$. В этом случае $\mathsf{P}(\tau_k < \infty) = 1$ при любом $k \geqslant 1$. Пусть ν — число возвращений в состояние j за бесконечное число шагов. Очевидно, что $\{\nu \geqslant k\} = \{\tau_k < \infty\}$ и $\{\nu = \infty\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \{\tau_k < \infty\}$. Заметим, что события $\{\tau_k < \infty\}$ образуют вложенную последовательность:

$$\{\tau_1 < \infty\} \supseteq \{\tau_2 < \infty\} \supseteq \ldots \supseteq \{\tau_k < \infty\} \supseteq \ldots$$

Значит, в силу непрерывности вероятностной меры,

$$\mathsf{P}(\nu = \infty) = \lim_{k \to \infty} \mathsf{P}(\tau_k < \infty) = 1.$$

□

Классификация состояний

Теорема 3.5

Пусть j *— возвратное состояние. Пусть* τ_k *— момент* k*-го возвращения в состояние* j*,* $k = 1, 2, \ldots$ *Положим* $\xi_1 = \tau_1$ *и* $\xi_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ *при* $k \geqslant 2$*. Тогда* $\{\xi_k\}_{k \geqslant 1}$ *— независимые и одинаково распределённые случайные величины.*

Доказательство

Так как j — возвратное состояние, то, как показано в теореме 3.4, $\mathsf{P}(\tau_k < \infty) = 1$ при любом $k \geqslant 1$ и число возвращений в состояние j бесконечно с вероятностью 1.

После k-го возвращения в исходное состояние j дальнейшее поведение цепи Маркова подчиняется тем же закономерностям, как если бы она только начинала своё движение. Отсюда, очевидно, следует одинаковая распределённость случайных величин $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$.

Доказательство

Докажем независимость ξ_1 и ξ_2. Используя марковость и однородность цепи, для любых состояний k и m имеем:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{P}(\xi_2 = m \mid \xi_1 = k) = \\
= \; & \mathsf{P}(X_{k+m} = j, X_{k+m-1} \neq j, \ldots, X_{k+1} \neq j \mid \\
& \qquad\qquad X_k = j, X_{k-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j, X_0 = j) = \\
= \; & \mathsf{P}(X_{k+m} = j, X_{k+m-1} \neq j, \ldots, X_{k+1} \neq j \mid X_k = j) = \\
= \; & \mathsf{P}(X_m = j, X_{m-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = j) = \\
= \; & \mathsf{P}(\xi_1 = m) = \mathsf{P}(\xi_2 = m).
\end{aligned}
$$

Независимость любого набора $\xi_1, \ldots, \xi_n$ проверяется аналогично. □

Теорема 3.6 (теорема солидарности)

В неразложимой цепи Маркова все состояния принадлежат одному типу: если хоть одно возвратно, то и все возвратны; если хоть одно нулевое, то и все нулевые; если хоть одно периодично с периодом d, то и все периодичны с периодом d.

Доказательство

Пусть i и j — сообщающиеся состояния. Значит, существуют числа $k, m \geqslant 1$ такие, что $p_{i,j}(k) > 0$ и $p_{j,i}(m) > 0$. Тогда при $n \geqslant 1$

$$p_{i,i}(k+m+n) \geqslant p_{i,j}(k)p_{j,j}(n)p_{j,i}(m) = \alpha\beta p_{j,j}(n),$$

где $\alpha = p_{i,j}(k) > 0$, $\beta = p_{j,i}(m) > 0$. Точно так же получаем неравенство

$$p_{j,j}(k+m+n) \geqslant p_{j,i}(m)p_{i,i}(n)p_{i,j}(k) = \alpha\beta p_{i,i}(n).$$

Следовательно,

$$\alpha\beta p_{i,i}(n-k-m) \leqslant p_{j,j}(n) \leqslant \frac{1}{\alpha\beta} p_{i,i}(k+m+n).$$

Классификация состояний

Доказательство

Из этих неравенств следует, что асимптотические свойства у $p_{i,i}(n)$ и $p_{j,j}(n)$ одинаковы. Если i — нулевое состояние, то есть $p_{i,i}(n) \to 0$ при $n \to \infty$, то и $p_{j,j}(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Если i — возвратное или, что то же, $P_i = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{i,i}(n) = \infty$, то

$$\sum_{n=k+m+1}^{\infty} p_{j,j}(n) \geqslant \alpha\beta \sum_{n=k+m+1}^{\infty} p_{i,i}(n-k-m) = \infty$$

и, значит, j — тоже возвратное.

Доказательство

Предположим теперь, что i — периодическое состояние с периодом d_i. Если $p_{i,i}(n) > 0$, то d_i делит n. Так как $p_{i,i}(k+m) \geqslant \alpha\beta > 0$, то d_i делит $k+m$.

Покажем, что состояние j тоже периодическое и его период d_j равен d_i. Действительно, если $p_{j,j}(n) > 0$ для некоторого n, то, как показано выше, $p_{i,i}(k+m+n) > 0$. Следовательно, d_i делит $k+m+n$, а из того, что d_i делит $k+m$, мы получаем, что d_i делит n и, следовательно, $d_i \leqslant d_j$. Аналогично можно доказать, что $d_j \leqslant d_i$. Таким образом, $d_i = d_j$. □

Классификация состояний

Замечание

Если i и j сообщающиеся нулевые состояния, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = 0$. Это следует из неравенства $p_{j,j}(m+n) \geqslant p_{j,i}(m)p_{i,j}(n)$. Таким образом, из невозвратности состояния j следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_{i,j}(n) = 0$.