СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2024

Оглавление

1. Основные понятия теории вероятностей
2. Случайные блуждания
3. Цепи Маркова
   - Дискретные цепи Маркова: определения, основные свойства, примеры

Дискретные цепи Маркова

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и пусть на этом пространстве задана последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ со значениями в конечном или счётном множестве S.

Определение 3.1

Последовательность $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ называется *дискретной цепью Маркова*, если равенство

$$\mathsf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = \mathsf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) \tag{3.1}$$

выполнено для любых $n \geqslant 1$ и всех состояний $x_0, x_1, \ldots, x_n \in S$, для которых указанные условные вероятности существуют.

Свойство (3.1) также называют марковским свойством. Случайная величина X_n характеризует состояние цепи в момент времени $n \geqslant 0$, поэтому событие $\{X_n = j\}$ читается как «на шаге n цепь находится в состоянии $j \in S$».

Определение 3.2

Вероятность $p_j(n) = \mathsf{P}(X_n = j)$, $j \in S$, называется *вероятностью состояния* j в момент $n \geqslant 0$.
Вектор $p(n) = (p_0(n), p_1(n), \ldots)$ называют *распределением вероятностей состояний* в момент $n \geqslant 0$.
Вектор $p(0) = (p_1(0), p_2(0), \ldots)$ называется *начальным распределением* цепи Маркова.

Определение 3.3

Число $p_{i,j}(n) = \mathsf{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$ называется *вероятностью перехода* из состояния $i \in S$ в состояние $j \in S$ за один шаг в момент $n \geqslant 1$.
Если $p_{i,j}(n)$ не зависит от n, то цепь называется *однородной* .

Для однородной цепи Маркова обозначим

$$p_{i,j} = p_{i,j}(1) = \mathsf{P}(X_1 = j \mid X_0 = i), \quad i, j \in S.$$

Определение 3.4

Для цепи Маркова с множеством состояний $\{0, 1, 2, \dots\}$ числа $p_{i,j}(n)$ образуют *матрицу переходных вероятностей*

$$P(n) = \begin{pmatrix} p_{0,0}(n) & p_{0,1}(n) & \dots & p_{0,n}(n) & \dots \\ p_{1,0}(n) & p_{1,1}(n) & \dots & p_{1,n}(n) & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ p_{n,0}(n) & p_{n,1}(n) & \dots & p_{n,n}(n) & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Сумма компонент произвольной матрицы переходных вероятностей в любой строке равна единице:

$$\sum_{j \in S} p_{i,j}(n) = 1 \quad \text{для любого} \quad i \in S.$$

Лемма 3.1

Если $\mathsf{P}(A) > 0$ *и* $\mathsf{P}(B) > 0$, *то*

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A \mid B)\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B \mid A)\mathsf{P}(A).$$

Лемма 3.2

Для любых событий $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *таких, что* $\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} A_i\right) > 0$, *верно равенство:*

$$\mathsf{P}(A_0 \cap A_1 \cap \ldots A_n) =$$
$$= \mathsf{P}(A_0)\mathsf{P}(A_1 \mid A_0)\mathsf{P}(A_2 \mid A_0 A_1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(A_n \mid A_0 A_1 \ldots A_{n-1}).$$

Лемма 3.3

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ *— цепь Маркова. Тогда для любых* $j_0, \ldots, j_n \in S$

$$\mathsf{P}(X_0 = j_0, \ldots, X_n = j_n) = \mathsf{P}(X_0 = j_0) \cdot p_{j_0,j_1}(1) \cdot p_{j_1,j_2}(2) \cdot \ldots \cdot p_{j_{n-1},j_n}(n).$$

Отметим, что если $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ — однородная цепь Маркова, то

$$\mathsf{P}(X_0 = j_0, \ldots, X_n = j_n) = \mathsf{P}(X_0 = j_0) \cdot p_{j_0,j_1} \cdot p_{j_1,j_2} \cdot \ldots \cdot p_{j_{n-1},j_n}.$$

Доказательство

Положим $A_i = \{X_i = j_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда из леммы 3.2 получаем:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{P}(X_0 = j_0, \dots, X_n = j_n) = \\
\overset{\text{л.3.2}}{=}\; & \mathsf{P}(X_0 = j_0)\mathsf{P}(X_1 = j_1 \mid X_0 = j_0)\mathsf{P}(X_2 = j_2 \mid X_0 = j_0, X_1 = j_1) \times \\
& \times \ldots \cdot \mathsf{P}(X_n = j_n \mid X_0 = j_0, \dots, X_{n-1} = j_{n-1}) = \\
= \; & \mathsf{P}(X_0 = j_0)\mathsf{P}(X_1 = j_1 \mid X_0 = j_0) \times \\
& \times \mathsf{P}(X_2 = j_2 \mid X_1 = j_1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(X_n = j_n \mid X_{n-1} = j_{n-1}) = \\
= \; & \mathsf{P}(X_0 = j_0) \cdot p_{j_0,j_1}(1) \cdot p_{j_1,j_2}(2) \cdot \ldots \cdot p_{j_{n-1},j_n}(n),
\end{aligned}
$$

так как

$$
\mathsf{P}(X_k = j_k \mid X_0 = j_0, \dots, X_{k-1} = j_{k-1}) = \mathsf{P}(X_k = j_k \mid X_{k-1} = j_{k-1})
$$

в силу определения цепи Маркова. □

Лемма 3.4

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ *— цепь Маркова и пусть* $m < n$. *Тогда для любых* $j_0, \ldots, j_n \in S$

$$\mathsf{P}(X_m = j_m, \ldots, X_n = j_n \mid X_0 = j_0, \ldots, X_{m-1} = j_{m-1}) =$$

$$= \mathsf{P}(X_m = j_m, \ldots, X_n = j_n \mid X_{m-1} = j_{m-1}).$$

Доказательство

Обозначим $B_k^l = \{X_k = j_k, \ldots, X_l = j_l\}$, $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant n$. Тогда из леммы 3.3 получаем:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{P}(X_m = j_m, \ldots, X_n = j_n \mid X_0 = j_0, \ldots, X_{m-1} = j_{m-1}) = \\
= \quad & \frac{\mathsf{P}(B_0^{m-1} \cap B_m^n)}{\mathsf{P}(B_0^{m-1})} = \\
\overset{\text{л.3.3}}{=} \quad & \frac{\mathsf{P}(X_0 = j_0) \cdot p_{j_0,j_1}(1) \cdot p_{j_1,j_2}(2) \cdot \ldots \cdot p_{j_{n-1},j_n}(n)}{\mathsf{P}(X_0 = j_0) \cdot p_{j_0,j_1}(1) \cdot p_{j_1,j_2}(2) \cdot \ldots \cdot p_{j_{m-2},j_{m-1}}(m-1)} = \\
= \quad & p_{j_{m-1},j_m}(m) \cdot \ldots \cdot p_{j_{n-1},j_n}(n).
\end{aligned}
$$

Доказательство

Ещё раз применяя лемму 3.3, с другой стороны получим:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{P}(X_m = j_m, \ldots, X_n = j_n \mid X_{m-1} = j_{m-1}) = \\
= \quad & \frac{\mathsf{P}(B^n_{m-1})}{\mathsf{P}(X_{m-1} = j_{m-1})} = \\
\overset{\text{л.}3.3}{=} \quad & \frac{\mathsf{P}(X_{m-1} = j_{m-1}) p_{j_{m-1}, j_m}(m) \cdot \ldots \cdot p_{j_{n-1}, j_n}(n)}{\mathsf{P}(X_{m-1} = j_{m-1})} = \\
= \quad & p_{j_{m-1}, j_m}(m) \cdot \ldots \cdot p_{j_{n-1}, j_n}(n).
\end{aligned}
$$

□

Пусть S – конечное или счётное множество.

Теорема 3.1

Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ со значениями в S является цепью Маркова тогда и только тогда, когда для любых $k < m$ и всех $I \subseteq S^k$, $J \subseteq S^{m-k}$, $j_k \in S$ имеет место равенство

$$\mathsf{P}(B_- \cap B_+ \mid B) = \mathsf{P}(B_- \mid B)\mathsf{P}(B_+ \mid B), \tag{3.2}$$

где $B_- = \{(X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}) \in I\}$, $B_+ = \{(X_{k+1}, \ldots, X_m) \in J\}$, $B = \{X_k = j_k\}$.

Доказательство

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ — цепь Маркова. Тогда из леммы 3.1 получаем:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(B_- \cap B_+ \mid B) \quad &= \quad \frac{\mathsf{P}(B_- \cap B \cap B_+)}{\mathsf{P}(B)} = \\
&\overset{\text{л.}3.1}{=} \quad \frac{\mathsf{P}(B_+ \mid B_- \cap B)\mathsf{P}(B_- \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \\
&\overset{\text{л.}3.1}{=} \quad \mathsf{P}(B_- \mid B)\mathsf{P}(B_+ \mid B_- \cap B) = \\
&\overset{(3.1)}{=} \quad \mathsf{P}(B_- \mid B)\mathsf{P}(B_+ \mid B).
\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из определения цепи Маркова.

Доказательство

Пусть равенство (3.2) выполнено для множеств

$$\begin{aligned} B_- &= \{X_0 = j_0, X_1 = j_1, \ldots, X_{k-1} = j_{k-1}\}, \\ B_+ &= \{X_{k+1} = j_{k+1}\}, \quad B = \{X_k = j_k\}. \end{aligned}$$

Тогда из леммы 3.1 и условия (3.2) имеем:

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}(X_{k+1} = j_{k+1} \mid X_0 = j_0, X_1 = j_1, \ldots, X_k = j_k) = \\ = \quad & \mathsf{P}(B_+ \mid B_- \cap B) = \frac{\mathsf{P}(B_- \cap B \cap B_+)}{\mathsf{P}(B_- \cap B)} \overset{\text{л.}3.1}{=} \frac{\mathsf{P}(B_- \cap B_+ \mid B)\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(B_- \mid B)\mathsf{P}(B)} = \\ \overset{(3.2)}{=} \quad & \frac{\mathsf{P}(B_- \mid B)\mathsf{P}(B_+ \mid B)}{\mathsf{P}(B_- \mid B)} = \mathsf{P}(B_+ \mid B) = \mathsf{P}(X_{k+1} = j_{k+1} \mid X_k = j_k), \end{aligned}$$

что и доказывает марковость цепи $\{X_n\}_{n \geqslant 0}$. □

Вектор $p(n) = (p_1(n), p_2(n), \dots)$ задаёт распределение цепи Маркова в момент времени n, где $p_j(n) = \mathsf{P}(X_n = j)$, $j = 0, 1, \dots$

Лемма 3.5

Пусть $P(n)$ — матрица переходных вероятностей на шаге $n \geqslant 1$. Тогда

$$p(n) = p(n-1)P(n).$$

Если цепь однородная, то $P(n) = P$ и

$$p(n) = p(0)P^n.$$

Доказательство

Утверждение следует из формулы полной вероятности:

$$\begin{aligned} p_j(n) &= \mathsf{P}(X_n = j) = \sum_{i \in S} \mathsf{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i)\mathsf{P}(X_{n-1} = i) = \\ &= \sum_{i \in S} p_{i,j}(n) p_i(n-1). \end{aligned}$$

$\square$

Определение 3.5

Условные вероятности $p_{i,j}(k,n) = \mathsf{P}(X_n = j \mid X_k = i)$ при $k < n$, $i, j \geqslant 0$, называются *переходными вероятностями* цепи Маркова $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$.

Лемма 3.6

Для дискретной цепи Маркова справедливо равенство:

$$p_{i,j}(m,n) = \sum_{k \in S} p_{i,k}(m,l) p_{k,j}(l,n)$$

для любых $m < l < n$.

Доказательство

По формуле полной вероятности, используя марковость цепи, имеем:

$$
\begin{aligned}
p_{i,j}(m,n) &= \mathsf{P}(X_n = j \mid X_m = i) = \sum_{k\in S} \mathsf{P}(X_n = j, X_l = k \mid X_m = i) = \\
&= \sum_{i_k\in S} \mathsf{P}(X_n = j \mid X_l = k, X_m = i)\mathsf{P}(X_l = k \mid X_m = i) = \\
&\overset{(3.1)}{=} \sum_{i_k\in S} \mathsf{P}(X_n = j \mid X_l = k)\mathsf{P}(X_l = k \mid X_m = i) = \\
&= \sum_{k\in S} p_{i,k}(m,l)p_{k,j}(l,n).
\end{aligned}
$$

□

Для однородной цепи Маркова

$$p_{i,j}(n) = \mathsf{P}(X_n = j \mid X_0 = i), \quad n \geqslant 1.$$

Лемма 3.7 (уравнение Колмогорова — Чэпмена)

Для однородной дискретной цепи Маркова справедливо равенство:

$$p_{i,j}(m+n) = \sum_{k \in S} p_{i,k}(m) p_{k,j}(n)$$

для любых $m, n \geqslant 1$.

Пусть P — матрица переходных вероятностей однородной цепи Маркова: $P = \|p_{i,j}\|_{i,j \in S}$. Тогда, как уже отмечалось, сумма компонент в каждой её строке равна единице, и каждая её компонента неотрицательна и не превышает единицу. Матрицы с такими свойствами называются *стохастическими*.

Теорема 3.2

Пусть P *— стохастическая матрица размера* $N \times N$*. Тогда матрицы* P *и* P^T *всегда имеют собственное значение, равное 1. Остальные собственные значения по модулю не превосходят 1.*

Доказательство

Так как сумма компонент матрицы P в каждой её строке равна 1, то достаточно взять вектор $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ и увидеть, что $P\mathbf{1}^\mathsf{T} = \mathbf{1}^\mathsf{T}$. Значит, матрица P имеет собственное значение $\lambda = 1$, а соответствующий собственный вектор равен $\mathbf{1}$. Отсюда следует, что и матрица P^T имеет собственное значение $\lambda = 1$, так как детерминанты произвольной матрицы и её транспонированной совпадают:

$$\det(P - \lambda E) = \det(P - \lambda E)^\mathsf{T} = \det(P^\mathsf{T} - \lambda E) = 0,$$

где E — единичная матрица, т. е. характеристические многочлены совпадают, а значит, и набор собственных значений матриц P и P^T совпадает.

Доказательство

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение и $z = (z_1, \dots, z_N)$ — соответствующий ненулевой собственный вектор: $Pz^{\mathsf{T}} = \lambda z^{\mathsf{T}}$. Пусть i_0 — такой индекс, что $|z_{i_0}| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} |z_i|$. Тогда

$$|\lambda||z_{i_0}| = \Big| \sum_{j=1}^{N} p_{i_0 j} z_j \Big| \leqslant \sum_{j=1}^{N} p_{i_0 j} |z_j| \leqslant |z_{i_0}| \sum_{j=1}^{N} p_{i_0 j} = |z_{i_0}|$$

и, значит, $|\lambda| \leqslant 1$. $\square$