

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2025

1 Основные понятия теории вероятностей

2 Цепи Маркова

- Эргодичность

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 0}$ — однородная цепь Маркова с множеством состояний S и матрицей переходных вероятностей P .

Пусть π — распределение вероятностей на множестве состояний S , то есть $\pi_j \geq 0$ для всех $j \in S$ и $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$.

Определение 2.14

Распределение π называется *стационарным*, если $\pi P = \pi$.

Теорема 2.7

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 0}$ — однородная цепь Маркова с конечным множеством состояний $S = \{1, 2, \dots, m\}$, и пусть $p_{i,j} > 0$ для всех $i, j \in S$. Тогда существует единственное стационарное распределение π , причём $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}(n)$ для любых $i, j \in S$. Более того, существует $0 < r < 1$ такое, что

$$|\pi_j - p_{i,j}(n)| \leq 2r^n$$

для любых $i, j \in S$ и всех $n \geq 1$.

Доказательство

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Положим $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_m|$.
Очевидно, что $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^m$. Определим оператор в пространстве $\mathbb{R}^m$: для каждого $x \in \mathbb{R}^m$ положим $Tx = xP$.
Обозначим $X = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$. Пусть $\delta = \min_{1 \leq i, j \leq m} p_{i,j}$.

Покажем, что

$$\|Tx - Ty\| \leq (1 - \delta m)\|x - y\|$$

для любых $x, y \in X$.

Пусть $z = x - y$. Тогда $Tx - Ty = xP - yP = (x - y)P = zP = Tz$ и

$$(Tz)_j = \sum_{i=1}^m p_{i,j} z_i = \sum_{i=1}^m (p_{i,j} - \delta) z_i + \delta \sum_{i=1}^m z_i = \sum_{i=1}^m (p_{i,j} - \delta) z_i,$$

так как $\sum_{i=1}^m z_i = \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^m y_i = 0$.

Доказательство

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|Tz\| &= \sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^m (p_{i,j} - \delta) z_i \right| \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m (p_{i,j} - \delta) |z_i| = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(|z_i| \sum_{j=1}^m (p_{i,j} - \delta) \right) = \\ &= (1 - \delta m) \sum_{i=1}^m |z_i| = (1 - \delta m) \|z\| = (1 - \delta m) \|x - y\|.\end{aligned}$$

Доказательство

Определим последовательность распределений $\{x_n\}_{n \geq 0}$, $x_n \in X$, следующим образом. Пусть x_0 — распределение цепи в момент времени $n = 0$, при $n \geq 1$ положим $x_n = Tx_{n-1}$, т. е. x_n — распределение цепи в момент времени n . Обозначим $r = 1 - \delta m$. Из оценки для $T(x - y)$ получаем $(x_n(i) - x_{k+n}(i))$ — i -тая координата вектора x_n для всех $i = 1, \dots, m$ и $k, n \geq 1$:

$$\begin{aligned} |x_n(i) - x_{k+n}(i)| &\leq \|x_n - x_{k+n}\| = \|Tx_{n-1} - Tx_{k+n-1}\| \leq \\ &\leq r\|x_{n-1} - x_{k+n-1}\| \leq \dots \leq r^n\|x_0 - x_k\| \leq \\ &\leq r^n(\|x_0\| + \|x_k\|) = 2r^n. \end{aligned}$$

Доказательство

Отсюда следует, что для каждого $i = 1, \dots, m$ последовательность $\{x_n(i)\}_{n \geq 0}$ является фундаментальной и, значит, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i)$. Обозначим это предел π_i . Тогда, очевидно, $\pi_i \geq 0$ для

каждого $i = 1, \dots, m$ и $\sum_{i=1}^m \pi_i = 1$.

Перейдя в неравенстве $|x_n(i) - x_{k+n}(i)| \leq 2r^n$ к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем:

$$|x_n(i) - \pi_i| \leq 2r^n,$$

для каждого $i = 1, \dots, m$ и всех $n \geq 1$. Следовательно, $\|x_n - \pi\| \leq 2mr^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство

Итак, с одной стороны $x_n \rightarrow \pi$ при $n \rightarrow \infty$. С другой, в силу очевидной непрерывности оператора T , имеем:

$$x_n = Tx_{n-1} \rightarrow T\pi = \pi P.$$

Значит, $\pi = \pi P$, то есть π — стационарное распределение.

Возьмём в качестве начального такое распределение x_0 , что $x_0(i) = 1$ и $x_0(j) = 0$ при $j \neq i$, $i = 1, \dots, m$. Тогда $x_n(j) = p_{i,j}(n)$ и, значит, $p_{i,j}(n) \rightarrow \pi_j$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $j = 1, \dots, m$. Более того,

$$|p_{i,j}(n) - \pi_j| = |x_n(j) - \pi_j| \leq 2r^n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Доказательство

Докажем единственность. Предположим, что существует другое распределение $\tilde{\pi}$, для которого $\tilde{\pi}P = \tilde{\pi}$. Но тогда $\tilde{\pi}P^n = \tilde{\pi}$ для всех $n \geq 1$, то есть для любого $j \in S$ и всех $n \geq 1$

$$\tilde{\pi}_j = \sum_{i \in S} \tilde{\pi}_i p_{i,j}(n).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, учитывая доказанное соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}(n) = \pi_j$, получаем:

$$\tilde{\pi}_j = \sum_{i \in S} \tilde{\pi}_i \pi_j = \pi_j \sum_{i \in S} \tilde{\pi}_i = \pi_j.$$



Замечание

Из теоремы 2.7, в частности, следует, что поведение цепи Маркова с течением времени стабилизируется: для любого $j \in S$

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in S} p_i p_{i,j}(n) \rightarrow \sum_{i \in S} p_i \pi_j = \pi_j,$$

где $p_i = P(X_0 = i)$, $i \in S$.

Определение 2.15

Цепь Маркова называется *эргодической*, если для любых $i, j \in S$ существуют не зависящие от i положительные пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}(n) = \pi_j.$$