

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2025

1 Основные понятия теории вероятностей

2 Цепи Маркова

- Дискретные цепи Маркова: определения, основные свойства, примеры

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и пусть на этом пространстве задана последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 0}$ со значениями в конечном или счётном множестве S .

Определение 2.1

Последовательность $\{X_n\}_{n \geq 0}$ называется *дискретной цепью Маркова*, если равенство

$$P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) \quad (2.1)$$

выполнено для любых $n \geq 1$ и всех состояний $x_0, x_1, \dots, x_n \in S$, для которых указанные условные вероятности существуют.

Свойство (2.1) также называют марковским свойством. Случайная величина X_n характеризует состояние цепи в момент времени $n \geq 0$, поэтому событие $\{X_n = j\}$ читается как «на шаге n цепь находится в состоянии $j \in S$ ».

Определение 2.2

Вероятность $p_j(n) = P(X_n = j)$, $j \in S$, называется *вероятностью состояния j в момент $n \geq 0$* .

Вектор $p(n) = (p_0(n), p_1(n), \dots)$ называют *распределением вероятностей состояний в момент $n \geq 0$* .

Вектор $p(0) = (p_1(0), p_2(0), \dots)$ называется *начальным распределением цепи Маркова*.

Определение 2.3

Число $p_{i,j}(n) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$ называется *вероятностью перехода* из состояния $i \in S$ в состояние $j \in S$ за один шаг в момент $n \geq 1$.

Если $p_{i,j}(n)$ не зависит от n , то цепь называется *однородной*.

Для однородной цепи Маркова обозначим

$$p_{i,j} = p_{i,j}(1) = P(X_1 = j \mid X_0 = i), \quad i, j \in S.$$

Определение 2.4

Для цепи Маркова с множеством состояний $\{0, 1, 2, \dots\}$ числа $p_{i,j}(n)$ образуют *матрицу переходных вероятностей*

$$P(n) = \begin{pmatrix} p_{0,0}(n) & p_{0,1}(n) & \dots & p_{0,n}(n) & \dots \\ p_{1,0}(n) & p_{1,1}(n) & \dots & p_{1,n}(n) & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ p_{n,0}(n) & p_{n,1}(n) & \dots & p_{n,n}(n) & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Сумма компонент произвольной матрицы переходных вероятностей в любой строке равна единице:

$$\sum_{j \in S} p_{i,j}(n) = 1 \quad \text{для любого } i \in S.$$

Лемма 2.1

Если $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, то

$$P(AB) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A).$$

Лемма 2.2

Для любых событий $A_0, A_1, \dots, A_n$ таких, что $P\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} A_i\right) > 0$, верно равенство:

$$\begin{aligned} P(A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_n) &= \\ &= P(A_0)P(A_1 \mid A_0)P(A_2 \mid A_0A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n \mid A_0A_1 \dots A_{n-1}). \end{aligned}$$

Лемма 2.3

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 0}$ — цепь Маркова. Тогда для любых $j_0, \dots, j_n \in S$

$$P(X_0 = j_0, \dots, X_n = j_n) = P(X_0 = j_0) \cdot p_{j_0, j_1}(1) \cdot p_{j_1, j_2}(2) \cdot \dots \cdot p_{j_{n-1}, j_n}(n).$$

Отметим, что если $\{X_n\}_{n \geq 0}$ — однородная цепь Маркова, то

$$P(X_0 = j_0, \dots, X_n = j_n) = P(X_0 = j_0) \cdot p_{j_0, j_1} \cdot p_{j_1, j_2} \cdot \dots \cdot p_{j_{n-1}, j_n}.$$

Доказательство

Положим $A_i = \{X_i = j_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда из леммы 2.2 получаем:

$$\begin{aligned} & P(X_0 = j_0, \dots, X_n = j_n) = \\ &= P(X_0 = j_0)P(X_1 = j_1 \mid X_0 = j_0)P(X_2 = j_2 \mid X_0 = j_0, X_1 = j_1) \times \\ & \quad \times \dots \cdot P(X_n = j_n \mid X_0 = j_0, \dots, X_{n-1} = j_{n-1}) = \\ &= P(X_0 = j_0)P(X_1 = j_1 \mid X_0 = j_0) \times \\ & \quad \times P(X_2 = j_2 \mid X_1 = j_1) \cdot \dots \cdot P(X_n = j_n \mid X_{n-1} = j_{n-1}) = \\ &= P(X_0 = j_0) \cdot p_{j_0, j_1}(1) \cdot p_{j_1, j_2}(2) \cdot \dots \cdot p_{j_{n-1}, j_n}(n), \end{aligned}$$

так как

$$P(X_k = j_k \mid X_0 = j_0, \dots, X_{k-1} = j_{k-1}) = P(X_k = j_k \mid X_{k-1} = j_{k-1})$$

в силу определения цепи Маркова. □

Лемма 2.4

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 0}$ — цепь Маркова и пусть $m < n$. Тогда для любых $j_0, \dots, j_n \in S$

$$\begin{aligned} P(X_m = j_m, \dots, X_n = j_n \mid X_0 = j_0, \dots, X_{m-1} = j_{m-1}) = \\ = P(X_m = j_m, \dots, X_n = j_n \mid X_{m-1} = j_{m-1}). \end{aligned}$$

Доказательство

Обозначим $B_k^l = \{X_k = j_k, \dots, X_l = j_l\}$, $0 \leq k \leq l \leq n$. Тогда из леммы 2.3 получаем:

$$\begin{aligned} & P(X_m = j_m, \dots, X_n = j_n \mid X_0 = j_0, \dots, X_{m-1} = j_{m-1}) = \\ &= \frac{P(B_0^{m-1} \cap B_m^n)}{P(B_0^{m-1})} = \\ &= \frac{P(X_0 = j_0) \cdot p_{j_0, j_1}(1) \cdot p_{j_1, j_2}(2) \cdot \dots \cdot p_{j_{n-1}, j_n}(n)}{P(X_0 = j_0) \cdot p_{j_0, j_1}(1) \cdot p_{j_1, j_2}(2) \cdot \dots \cdot p_{j_{m-2}, j_{m-1}}(m-1)} = \\ &= p_{j_{m-1}, j_m}(m) \cdot \dots \cdot p_{j_{n-1}, j_n}(n). \end{aligned}$$

Доказательство

Ещё раз применяя лемму 2.3, с другой стороны получим:

$$\begin{aligned} & P(X_m = j_m, \dots, X_n = j_n \mid X_{m-1} = j_{m-1}) = \\ &= \frac{P(B_{m-1}^n)}{P(X_{m-1} = j_{m-1})} = \\ &= \frac{P(X_{m-1} = j_{m-1}) p_{j_{m-1}, j_m}(m) \cdot \dots \cdot p_{j_{n-1}, j_n}(n)}{P(X_{m-1} = j_{m-1})} = \\ &= p_{j_{m-1}, j_m}(m) \cdot \dots \cdot p_{j_{n-1}, j_n}(n). \end{aligned}$$



Пусть S – конечное или счётное множество.

Теорема 2.1

Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 0}$ со значениями в S является цепью Маркова тогда и только тогда, когда для любых $k < m$ и всех $I \subseteq S^k$, $J \subseteq S^{m-k}$, $j_k \in S$ имеет место равенство

$$P(B_- \cap B_+ \mid B) = P(B_- \mid B)P(B_+ \mid B), \quad (2.2)$$

где $B_- = \{(X_0, X_1, \dots, X_{k-1}) \in I\}$, $B_+ = \{(X_{k+1}, \dots, X_m) \in J\}$, $B = \{X_k = j_k\}$.

Доказательство

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 0}$ — цепь Маркова. Тогда из леммы 2.1 получаем:

$$\begin{aligned} P(B_- \cap B_+ \mid B) &= \frac{P(B_- \cap B \cap B_+)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(B_+ \mid B_- \cap B)P(B_- \cap B)}{P(B)} = \\ &= P(B_- \mid B)P(B_+ \mid B_- \cap B) = \\ &= P(B_- \mid B)P(B_+ \mid B). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из определения цепи Маркова.

Доказательство

Пусть равенство (2.2) выполнено для множеств

$$\begin{aligned} B_- &= \{X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_{k-1} = j_{k-1}\}, \\ B_+ &= \{X_{k+1} = j_{k+1}\}, \quad B = \{X_k = j_k\}. \end{aligned}$$

Тогда из леммы 2.1 и условия (2.2) имеем:

$$\begin{aligned} &P(X_{k+1} = j_{k+1} \mid X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_k = j_k) = \\ &= P(B_+ \mid B_- \cap B) = \frac{P(B_- \cap B \cap B_+)}{P(B_- \cap B)} = \frac{P(B_- \cap B_+ \mid B)P(B)}{P(B_- \mid B)P(B)} = \\ &= \frac{P(B_- \mid B)P(B_+ \mid B)}{P(B_- \mid B)} = P(B_+ \mid B) = P(X_{k+1} = j_{k+1} \mid X_k = j_k), \end{aligned}$$

что и доказывает марковость цепи $\{X_n\}_{n \geq 0}$. □

Вектор $p(n) = (p_1(n), p_2(n), \dots)$ задаёт распределение цепи Маркова в момент времени n , где $p_j(n) = P(X_n = j)$, $j = 0, 1, \dots$

Лемма 2.5

Пусть $P(n)$ — матрица переходных вероятностей на шаге $n \geq 1$. Тогда

$$p(n) = p(n-1)P(n).$$

Если цепь однородная, то $P(n) = P$ и

$$p(n) = p(0)P^n.$$

Доказательство

Утверждение следует из формулы полной вероятности:

$$\begin{aligned} p_j(n) &= P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) P(X_{n-1} = i) = \\ &= \sum_{i \in S} p_{i,j}(n) p_i(n-1). \end{aligned}$$



Определение 2.5

Условные вероятности $p_{i,j}(k, n) = P(X_n = j \mid X_k = i)$ при $k < n$, $i, j \geq 0$, называются *переходными вероятностями* цепи Маркова $\{X_n\}_{n \geq 0}$.

Лемма 2.6

Для дискретной цепи Маркова справедливо равенство:

$$p_{i,j}(m, n) = \sum_{k \in S} p_{i,k}(m, l) p_{k,j}(l, n)$$

для любых $m < l < n$.

Доказательство

По формуле полной вероятности, используя марковость цепи, имеем:

$$\begin{aligned} p_{i,j}(m,n) &= P(X_n = j \mid X_m = i) = \sum_{k \in S} P(X_n = j, X_l = k \mid X_m = i) = \\ &= \sum_{i_k \in S} P(X_n = j \mid X_l = k, X_m = i) P(X_l = k \mid X_m = i) = \\ &= \sum_{i_k \in S} P(X_n = j \mid X_l = k) P(X_l = k \mid X_m = i) = \\ &= \sum_{k \in S} p_{i,k}(m,l) p_{k,j}(l,n). \end{aligned}$$



Дискретные цепи Маркова

Для однородной цепи Маркова

$$p_{i,j}(n) = P(X_n = j \mid X_0 = i), \quad n \geq 1.$$

Лемма 2.7 (уравнение Колмогорова — Чэпмена)

Для однородной дискретной цепи Маркова справедливо равенство:

$$p_{i,j}(m+n) = \sum_{k \in S} p_{i,k}(m) p_{k,j}(n)$$

для любых $m, n \geq 1$.

Пусть P — матрица переходных вероятностей однородной цепи Маркова: $P = \|p_{i,j}\|_{i,j \in S}$. Тогда, как уже отмечалось, сумма компонент в каждой её строке равна единице, и каждая её компонента неотрицательна и не превышает единицу. Матрицы с такими свойствами называются *стохастическими*.

Теорема 2.2

Пусть P — стохастическая матрица размера $N \times N$. Тогда матрицы P и P^T всегда имеют собственное значение, равное 1. Остальные собственные значения по модулю не превосходят 1.

Доказательство

Так как сумма компонент матрицы P в каждой её строке равна 1, то достаточно взять вектор $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ и увидеть, что $P\mathbf{1}^T = \mathbf{1}^T$.

Значит, матрица P имеет собственное значение $\lambda = 1$, а соответствующий собственный вектор равен $\mathbf{1}$. Отсюда следует, что и матрица P^T имеет собственное значение $\lambda = 1$, так как детерминанты произвольной матрицы и её транспонированной совпадают:

$$\det(P - \lambda E) = \det(P - \lambda E)^T = \det(P^T - \lambda E) = 0,$$

где E — единичная матрица, т. е. характеристические многочлены совпадают, а значит, и набор собственных значений матриц P и P^T совпадает.

Дискретные цепи Маркова

Доказательство

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение и $z = (z_1, \dots, z_N)$ — соответствующий ненулевой собственный вектор: $Pz^T = \lambda z^T$.

Пусть i_0 — такой индекс, что $|z_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq N} |z_i|$. Тогда

$$|\lambda||z_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^N p_{i_0 j} z_j \right| \leq \sum_{j=1}^N p_{i_0 j} |z_j| \leq |z_{i_0}| \sum_{j=1}^N p_{i_0 j} = |z_{i_0}|$$

и, значит, $|\lambda| \leq 1$. □