

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Е. А. Бакланов

Новосибирск 2024

- 1 Основные понятия теории вероятностей
 - Случайные величины. Математическое ожидание
 - Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания
 - Основные неравенства
 - Непрерывность вероятностной меры. Лемма Бореля — Кантелли

Случайные величины. Математическое ожидание

Пусть (Ω, \mathcal{F}) — измеримое пространство, то есть непустое множество Ω , состоящее из элементарных исходов ω , с выделенной на нём системой \mathcal{F} его подмножеств (событий), образующих σ -алгебру.

Напомним, что система \mathcal{F} подмножеств пространства Ω образует алгебру, если $\Omega \in \mathcal{F}$, $\bar{A} \equiv \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ и $A \cup B \in \mathcal{F}$ для любых $A, B \in \mathcal{F}$.

Алгебра \mathcal{F} образует σ -алгебру, если вместе с каждой последовательностью событий A_1, A_2, \dots , принадлежащих \mathcal{F} , объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ также принадлежит \mathcal{F} .

Функция $P(A)$, определённая на множествах A из σ -алгебры \mathcal{F} , называется *вероятностной мерой* или *вероятностью*, если она обладает следующими свойствами:

(i) $P(A) \geq 0$ для любого события $A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность);

(ii) $P(\Omega) = 1$ (нормированность);

(iii) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ для любого счётного набора попарно несовместных событий $A_i \in \mathcal{F}$ (σ -аддитивность).

Тройка (Ω, \mathcal{F}, P) называется *вероятностным пространством*.

Пусть \mathcal{A} — некоторый класс множеств из Ω .

Минимальная σ -алгебра, содержащая \mathcal{A} , называется *σ -алгеброй, порождённой классом \mathcal{A}* , и обозначается $\sigma(\mathcal{A})$.

Если \mathcal{A} — класс открытых множеств (топологического или метрического пространства), то $\sigma(\mathcal{A})$ называется *борелевской σ -алгеброй*. Элементы борелевской σ -алгебры называют *борелевскими множествами*.

Борелевскую σ -алгебру в \mathbb{R} будем обозначать $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Случайные величины. Математическое ожидание

Функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *борелевской*, если прообраз каждого борелевского множества есть снова борелевское множество: для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$g^{-1}(B) \equiv \{x: g(x) \in B\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Действительная функция $X = X(\omega)$, определённая на измеримом пространстве (Ω, \mathcal{F}) , называется *\mathcal{F} -измеримой функцией* или *случайной величиной*, если для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$X^{-1}(B) = \{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Простейшим примером случайной величины является *индикатор* $I_A(\omega)$ измеримого множества $A \in \mathcal{F}$:

$$I_A = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A; \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Случайная величина X называется *простой*, если она принимает конечное число значений. Любая простая случайная величина представима в виде

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}(\omega),$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, события $A_i \in \mathcal{F}$ попарно несовместны и $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

Пусть $X = X(\omega)$ — случайная величина. Рассмотрим множества из \mathcal{F} вида $\{\omega: X(\omega) \in B\}$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Они образуют σ -алгебру, называемую σ -алгеброй, порождённой случайной величиной X . Будем её обозначать $\sigma(X)$.

Вероятностная мера P_X на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, заданная соотношением

$$P_X(B) = P\{\omega: X(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

называется *распределением вероятностей* случайной величины X на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Функция

$$F_X(x) = P\{\omega: X(\omega) < x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

называется *функцией распределения* случайной величины X .

Пусть $F(x)$ — некоторая функция распределения на числовой прямой \mathbb{R} . Тогда на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ существует единственная вероятностная мера P такая, что $P[a, b) = F(b) - F(a)$ для любых $-\infty < a < b \leq \infty$.

Таким образом, между вероятностными мерами P на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ и функциями распределения F на числовой прямой \mathbb{R} существует взаимно однозначное соответствие.

Мера P , построенная по функции F , называется вероятностной *мерой Лебега — Стильеса*, соответствующей функции распределения F .

Пусть $F(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$. В этом случае соответствующую вероятностную меру называют *мерой Лебега* на отрезке $[0, 1]$. Ясно, что мера Лебега любого из интервалов $[a, b)$, $[a, b]$, (a, b) , $(a, b]$ равна его длине $b - a$.

Случайные величины. Математическое ожидание

Мерой Лебега — Стильеса на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ называется любая мера (то есть неотрицательная и σ -аддитивная функция) μ такая, что для любого ограниченного интервала I его мера $\mu(I) < \infty$.

Обобщённой функцией распределения на \mathbb{R} называется любая неубывающая и непрерывная слева функция со значениями в $(-\infty, +\infty)$.

Соотношение

$$\mu[a, b) = F(b) - F(a), \quad a < b,$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между мерами Лебега — Стильеса μ и обобщёнными функциями распределения F .

Пусть $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Отвечающая этой обобщённой функции распределения мера μ называется *мерой Лебега* на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Случайные величины. Математическое ожидание

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство и $X = X(\omega)$ — неотрицательная случайная величина.

Её математическое ожидание, обозначаемое EX , есть интеграл Лебега $\int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega)$, по определению равный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} P \left(\frac{k-1}{2^n} \leq X < \frac{k}{2^n} \right) + nP(X \geq n) \right).$$

Так как $X \geq 0$, то интеграл $\int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega)$ определён, хотя, быть может, и принимает значение $+\infty$.

Пусть $X = X(\omega)$ — произвольная случайная величина и $X^+ = \max\{X, 0\}$, $X^- = -\min\{X, 0\}$. Тогда математическое ожидание EX определяется только в том случае, когда по крайней мере одна из величин EX^+ или EX^- конечна, и полагается равным $EX = EX^+ - EX^-$.

Случайная величина $X = X(\omega)$ называется *интегрируемой*, если $E|X| = EX^+ + EX^- < \infty$.

Случайные величины. Математическое ожидание

Если EX определено, то определены также математические ожидания $E(XI_A)$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

Для $E(XI_A)$ или, что то же, $\int_{\Omega} XI_A dP$, часто используются обозначения $E(X; A)$ и $\int_A X dP$.

Интеграл $\int_A X dP$ называется *интегралом Лебега от X по множеству A* (по мере P).

Случайные величины. Математическое ожидание

Пусть μ — произвольная мера, заданная на измеримом пространстве (Ω, \mathcal{F}) и принимающая, быть может, значение $+\infty$, а $X = X(\omega)$ — \mathcal{F} -измеримая функция со значениями в $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ (расширенная случайная величина).

В этом случае интеграл Лебега $\int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega)$ определяется точно так же: сначала для неотрицательных X по формуле

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mu \left(\omega : \frac{k-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k}{2^n} \right) + n \mu(\omega : X(\omega) \geq n) \right), \end{aligned}$$

затем для произвольных X по формуле

$$\int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} X^+(\omega) \mu(d\omega) - \int_{\Omega} X^-(\omega) \mu(d\omega),$$

если только не возникает неопределённость вида $\infty - \infty$.

В случае, когда $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, а μ — мера Лебега, интеграл $\int_{\mathbb{R}} X(x) \mu(dx)$ обозначают $\int_{\mathbb{R}} X(x) dx$.

Если же мера μ соответствует некоторой обобщённой функции распределения F , то интеграл $\int_{\mathbb{R}} X(x) \mu(dx)$ называют *интегралом Лебега — Стильеса* (по мере, соответствующей функции распределения F) и обозначают $\int_{\mathbb{R}} X(x) dF(x)$.

Пусть $X = X(\omega)$ — случайная величина с функцией распределения F , g — борелевская функция. Если существует один из интегралов $\int_A g(x) dF(x)$ или $\int_{X^{-1}(A)} g(X(\omega)) P(d\omega)$, то существует и другой, и они совпадают. В частности, при $A = \mathbb{R}$ получаем:

$$Eg(X) = \int_{\Omega} g(X(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x).$$

События A_1, \dots, A_n , $n \geq 2$, называются *независимыми* (в совокупности), если для любого набора индексов $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}).$$

События, составляющие бесконечное семейство, называются *независимыми*, если для каждого $n \geq 2$ любые n из этих событий независимы.

Классы событий $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ называются *независимыми*, если любые события A_1, A_2, \dots такие, что $A_k \in \mathcal{A}_k$, являются независимыми.

Случайные величины X_1, X_2, \dots , заданные на одном вероятностном пространстве, называются *независимыми*, если независимы порождённые ими σ -алгебры.

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

В этом параграфе будут рассмотрены основные теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания (интеграла Лебега).

Лемма 1.1

Для произвольной неотрицательной случайной величины $X \geq 0$ существует последовательность простых случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ такая, что $X_n \uparrow X$, т. е. $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Доказательство

Для каждого $n = 1, 2, \dots$ положим

$$X_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I \left\{ \omega: \frac{k-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k}{2^n} \right\} + nI(\omega: X(\omega) \geq n).$$

Непосредственно проверяется, что $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. □

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Замечание

Лемма 1.1 является ключевой при построении интеграла Лебега. Так как $X_n \leq X_{n+1}$, то $EX_n \leq EX_{n+1}$ и, следовательно, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n$ (который может принимать и значение $+\infty$), который и называется интегралом Лебега от неотрицательной случайной величины X .

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Теорема 1.1 (теорема о монотонной сходимости)

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность неотрицательных случайных величин. Если $X_n \uparrow X$, то $EX_n \uparrow EX$.

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Доказательство

Построим для каждого $k \geq 1$ последовательность простых случайных величин $\{X_{k,n}\}_{n \geq 1}$ таких, что $X_{k,n} \uparrow X_k$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим $Y_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_{k,n}$. Тогда

$$Y_{n-1} \leq Y_n \leq \max_{1 \leq k \leq n} X_k = X_n.$$

Пусть $Y = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$. Так как $X_{k,n} \leq Y_n \leq X_n$ для $1 \leq k \leq n$, то, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что $X_k \leq Y \leq X$ для любого $k \geq 1$, а значит, $Y = X$.

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Доказательство

Случайные величины Y_n простые и $Y_n \uparrow Y$. Поэтому

$$EX = EY = \lim_{n \rightarrow \infty} EY_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} EX_n.$$

С другой стороны, поскольку $X_n \leq X_{n+1} \leq X$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n \leq EX.$$

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX$. □

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Следствие 1.1

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность неотрицательных случайных величин. Если $EX_1 < \infty$ и $X_n \downarrow X$, то $EX_n \downarrow EX$.

Доказательство

Достаточно заметить, что $0 \leq X_1 - X_n \uparrow X_1 - X$, и воспользоваться теоремой о монотонной сходимости. □

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Следствие 1.2

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность неотрицательных случайных величин. Тогда

$$E \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} EX_n.$$

Доказательство

Заметим, что $0 \leq Z_n \equiv \sum_{i=1}^n X_i \uparrow \sum_{i=1}^{\infty} X_i \equiv Z$. По теореме о монотонной сходимости $EZ_n \uparrow EZ$. С другой стороны, $EZ_n = \sum_{i=1}^n EX_i \uparrow \sum_{i=1}^{\infty} EX_i$.

Значит, $EZ = \sum_{i=1}^{\infty} EX_i$. □

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Следствие 1.3

Если $E|X| < \infty$, то $E(|X|I_A) \rightarrow 0$ при $P(A) \rightarrow 0$.

Доказательство

Положим $X_n = |X|I(|X| \leq n)$. Тогда $X_n \uparrow |X|$ и, в силу теоремы о монотонной сходимости, $E X_n \uparrow E|X| < \infty$. Следовательно,

$$E|X|I(|X| > n) = E|X| - E|X|I(|X| \leq n) \rightarrow 0,$$

то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся n_0 такое, что $E|X|I(|X| > n) \leq \varepsilon/2$ при $n \geq n_0$.

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Доказательство

Если $P(A) \leq \varepsilon/(2n_0)$, то

$$\begin{aligned} E(|X|I_A) &= E(|X|I_AI(|X| > n_0)) + E(|X|I_AI(|X| \leq n_0)) \leq \\ &\leq E|X|I(|X| > n_0) + n_0P(A) \leq \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$



Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Лемма 1.2 (Фату)

(i) Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность неотрицательных случайных величин. Тогда

$$E(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} EX_n.$$

(ii) Пусть $|X_n| \leq Y$ для всех $n \geq 1$ и $EY < \infty$. Тогда

$$E(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} EX_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} EX_n \leq E(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n).$$

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Доказательство

Положим $Y_n = \inf_{k \geq n} X_k$. Тогда $Y_n \uparrow \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$. По теореме о монотонной сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EY_n = E(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n) = E(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n).$$

Так как $Y_n \leq X_n$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EY_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} EY_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} EX_n.$$

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Доказательство

Так как $Y - X_n \geq 0$, $Y + X_n \geq 0$ и

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (Y - X_n) = Y - \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (Y + X_n) = Y + \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n,$$

то второе утверждение следует из первого. □

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Теорема 1.2 (теорема Лебега о мажорируемой сходимости)

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность случайных величин таких, что $|X_n| \leq Y$, $EY < \infty$ и $X_n \rightarrow X$. Тогда $E|X| < \infty$, $EX_n \rightarrow EX$ и $E|X_n - X| \rightarrow 0$.

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Доказательство

По условию $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = X$. Поэтому в силу леммы Фату

$$EX = E(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} EX_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} EX_n \leq E(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n) = EX,$$

то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX$. Очевидно также, что $|X| \leq Y$. Поэтому $E|X| < \infty$.

Сходимость $E|X_n - X| \rightarrow 0$ доказывается точно так же, если только заметить, что $|X_n - X| \leq 2Y$. □

Теоремы о предельном переходе под знаком математического ожидания

Следствие 1.4

Пусть $X_n \rightarrow X$, $|X_n| \leq Y$, $EY^p < \infty$ для некоторого $p > 0$. Тогда $E|X|^p < \infty$ и $E|X_n - X|^p \rightarrow 0$.

Доказательство

Достаточно заметить, что $|X| \leq Y$ и

$$|X_n - X|^p \leq (|X_n| + |X|)^p \leq (2Y)^p. \quad \square$$

Приведённые в этом параграфе неравенства (для математических ожиданий) находят широкое применение и в теории вероятностей, и в математическом анализе. Сначала мы получим ряд неравенств, называемых *неравенствами Чебышёва*.

Теорема 1.3 (обобщённое неравенство Чебышёва)

Пусть g — неотрицательная и неубывающая функция такая, что $Eg(X) < \infty$. Тогда для всех x таких, что $g(x) > 0$

$$P(X \geq x) \leq \frac{Eg(X)}{g(x)}. \quad (1.1)$$

Доказательство

Заметим, что $I_A + I_{\bar{A}} = 1$ для любого события A . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}g(X) &= \mathbf{E}g(X)I(X \geq x) + \mathbf{E}g(X)I(X < x) \geq \\ &\geq \mathbf{E}g(X)I(X \geq x) \geq g(x)\mathbf{E}I(X \geq x) = \\ &= g(x)\mathbf{P}(X \geq x), \end{aligned}$$

где $I(A)$ также обозначает индикатор события A . □

Основные неравенства

Выбирая подходящие функции g , из неравенства (1.1) получаем следующие известные неравенства.

Неравенство Маркова

Пусть $E|X|^p < \infty$ для некоторого $p > 0$. Тогда для всех $x > 0$

$$P(|X| \geq x) \leq \frac{E|X|^p}{x^p}. \quad (1.2)$$

Неравенство Чебышёва

Пусть $DX < \infty$. Тогда для всех $x > 0$

$$P(|X - EX| \geq x) \leq \frac{DX}{x^2}. \quad (1.3)$$

Экспоненциальное неравенство Чебышёва

Пусть $Ee^{\lambda X} < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}$

$$P(X \geq x) \leq \frac{Ee^{\lambda X}}{e^{\lambda x}}. \quad (1.4)$$

Определение 1.1

Функция $g = g(x)$ называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in \mathbb{R}$ и для любого $\alpha \in [0, 1]$

$$\alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y) \geq g(\alpha x + (1 - \alpha)y). \quad (1.5)$$

Докажем одно полезное свойство выпуклых функций.

Лемма 1.3

Пусть g — выпуклая функция. Тогда для каждого $z \in \mathbb{R}$ найдётся число $c = c(z)$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \geq g(z) + c(x - z).$$

Основные неравенства

Доказательство

Пусть $x < z < y$. Тогда $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$, где $\alpha = \frac{y - z}{y - x}$. В силу выпуклости функции g имеем:

$$\alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y) = g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y).$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \frac{y - z}{y - x} (g(z) - g(x)) &= \alpha(g(z) - g(x)) \leq (1 - \alpha)(g(y) - g(z)) = \\ &= \frac{z - x}{y - x} (g(y) - g(z)), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{g(z) - g(x)}{z - x} \leq \frac{g(y) - g(z)}{y - z}.$$

Основные неравенства

Доказательство

Зафиксируем точку $z \in \mathbb{R}$. Тогда найдётся число $c \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $x < z$ и всех $y > z$

$$\frac{g(z) - g(x)}{z - x} \leq c \leq \frac{g(y) - g(z)}{y - z}.$$

Отсюда следует, что $g(x) \geq g(z) + c(x - z)$ при $x < z$ и $g(y) \geq g(z) + c(y - z)$ при $y > z$, то есть $g(x) \geq g(z) + c(x - z)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. □

Теорема 1.4 (неравенство Йенсена)

Пусть $E|X| < \infty$ и пусть g — выпуклая функция. Тогда

$$g(EX) \leq Eg(X). \quad (1.6)$$

Доказательство

Так как g — выпуклая функция, то в силу леммы 1.3 для каждого $y \in \mathbb{R}$ найдётся число $c(y)$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \geq g(y) + c(y)(x - y).$$

Положив здесь $x = X$, $y = EX$ и взяв математическое ожидание обеих частей этого неравенства, получим:

$$Eg(X) \geq g(EX).$$



Основные неравенства

Из неравенства Йенсена выводится ряд полезных неравенств. Например, получим следующее неравенство, связывающее моменты разных порядков.

Теорема 1.5 (неравенство Ляпунова)

Если $0 < s < t$, то

$$(E|X|^s)^{1/s} \leq (E|X|^t)^{1/t}. \quad (1.7)$$

Доказательство

Так как $r = t/s > 1$, то функция $g(x) = |x|^r$ — выпуклая. Из неравенства Йенсена для $Y = |X|^s$ находим, что $|EY|^r \leq E|Y|^r$, то есть $(E|X|^s)^{t/s} \leq E|X|^t$, что и доказывает (1.7). □

Из неравенства Ляпунова вытекает следующая цепочка неравенств между абсолютными моментами:

$$E|X| \leq (E|X|^2)^{1/2} \leq \dots \leq (E|X|^m)^{1/m} \leq \dots \quad (1.8)$$

Теорема 1.6 (неравенство Гёльдера)

Пусть $1 < p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$. Тогда

$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{1/p} (E|Y|^q)^{1/q}. \quad (1.9)$$

Основные неравенства

Доказательство

Если $E|X|^p = 0$ или $E|Y|^q = 0$, то неравенство (1.9) очевидно. Пусть $E|X|^p > 0$, $E|Y|^q > 0$. Положим

$$\tilde{X} = \frac{|X|}{(E|X|^p)^{1/p}}, \quad \tilde{Y} = \frac{|Y|}{(E|Y|^q)^{1/q}}.$$

Воспользуемся *неравенством Юнга*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad x, y > 0, \quad 1/p + 1/q = 1, \quad (1.10)$$

вытекающим непосредственно из выпуклости функции $g(x) = -\ln x$:

$$xy = e^{\ln(xy)} = \exp \left\{ \frac{\ln x^p}{p} + \frac{\ln y^q}{q} \right\} \leq \exp \left\{ \ln \left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \right) \right\} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Доказательство

Из (1.10) получаем

$$E(\tilde{X}\tilde{Y}) \leq \frac{1}{p} E\tilde{X}^p + \frac{1}{q} E\tilde{Y}^q = 1/p + 1/q = 1,$$

что и доказывает (1.9). □

Частным случаем неравенства Гёльдера при $p = q = 2$ является *неравенство Коши — Буняковского*:

$$E|XY| \leq \sqrt{EX^2} \sqrt{EY^2}.$$

Для доказательства ещё одного известного неравенства — *неравенства Минковского* — нам понадобится так называемое C_r -*неравенство*.

Лемма 1.4

Пусть $r > 0$. Тогда

$$|x + y|^r \leq C_r (|x|^r + |y|^r), \quad (1.11)$$

где $C_r = \max\{1, 2^{r-1}\}$.

Основные неравенства

Доказательство

Без ограничения общности можно считать, что $x, y > 0$. Пусть $0 < r \leq 1$. Так как в этом случае $x^{1/r} \leq x$ для всех $0 < x \leq 1$, то

$$\left(\frac{x^r}{x^r + y^r}\right)^{1/r} + \left(\frac{y^r}{x^r + y^r}\right)^{1/r} \leq \frac{x^r}{x^r + y^r} + \frac{y^r}{x^r + y^r} = 1.$$

Отсюда находим, что $(x + y) \leq (x^r + y^r)^{1/r}$, то есть $(x + y)^r \leq x^r + y^r$. Пусть теперь $r \geq 1$. Тогда функция $|x|^r$ выпукла и, следовательно,

$$\left(\frac{x + y}{2}\right)^r \leq \frac{x^r + y^r}{2},$$

что и даёт неравенство (1.11). □

Замечание

C_r -неравенство нетрудно обобщить на случай n слагаемых:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right|^r \leq \max\{1, n^{r-1}\} \sum_{i=1}^n |x_i|^r, \quad r > 0. \quad (1.12)$$

Основные неравенства

Сначала покажем, что функция $g = g(x)$ выпукла тогда и только тогда, когда для любых $x_i \in \mathbb{R}$ и для любых $\alpha_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$,

$$g(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 g(x_1) + \dots + \alpha_n g(x_n). \quad (1.13)$$

Очевидно, из (1.13) следует (1.5). Пусть теперь выполнено (1.5) и пусть неравенство (1.13) справедливо для некоторого $n > 2$. Тогда, учитывая равенство $1 - \alpha_{n+1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, получаем:

$$\begin{aligned} & g(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq \\ & \leq \alpha_{n+1} g(x_{n+1}) + (1 - \alpha_{n+1}) g\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{1 - \alpha_{n+1}}\right) \leq \\ & \leq \alpha_{n+1} g(x_{n+1}) + (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} g(x_i) = \\ & = \alpha_1 g(x_1) + \dots + \alpha_{n+1} g(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Основные неравенства

Из (1.13), в частности, получаем следующее неравенство для выпуклых функций:

$$g\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{g(x_1) + \dots + g(x_n)}{n}.$$

Теперь неравенство (1.12) доказывается точно так же, как и (1.11). Действительно, если $0 < r \leq 1$, то

$$\begin{aligned} & \frac{|x_1| + \dots + |x_n|}{(|x_1|^r + \dots + |x_n|^r)^{1/r}} = \\ & = \left(\frac{|x_1|^r}{|x_1|^r + \dots + |x_n|^r} \right)^{1/r} + \dots + \left(\frac{|x_n|^r}{|x_1|^r + \dots + |x_n|^r} \right)^{1/r} \leq \\ & \leq \frac{|x_1|^r}{|x_1|^r + \dots + |x_n|^r} + \dots + \frac{|x_n|^r}{|x_1|^r + \dots + |x_n|^r} = 1. \end{aligned}$$

Основные неравенства

Если $r \geq 1$, то из выпуклости функции $|x|^r$ и неравенства (1.13) получаем:

$$\left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right|^r \leq \frac{|x_1|^r + \dots + |x_n|^r}{n}.$$

Итак, неравенство (1.12) доказано. □

Теорема 1.7 (неравенство Минковского)

Если $1 \leq p < \infty$, то

$$(\mathbb{E}|X + Y|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} + (\mathbb{E}|Y|^p)^{1/p}. \quad (1.14)$$

Основные неравенства

Доказательство

Из неравенства (1.11) следует, что $E|X + Y|^p < \infty$, если $E|X|^p < \infty$ и $E|Y|^p < \infty$.

Если $p = 1$, то неравенство (1.14) следует из (1.11).

Пусть $p > 1$. Тогда

$$|X + Y|^p = |X + Y||X + Y|^{p-1} \leq |X||X + Y|^{p-1} + |Y||X + Y|^{p-1}. \quad (1.15)$$

Пусть $q = p/(p - 1) > 1$. Тогда

$$E(|X + Y|^{p-1})^q = E|X + Y|^p < \infty,$$

и, значит, в силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} E(|X||X + Y|^{p-1}) &\leq (E|X|^p)^{1/p} \left(E|X + Y|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = \\ &= (E|X|^p)^{1/p} (E|X + Y|^p)^{1/q}. \end{aligned}$$

Доказательство

Точно так же и

$$E(|Y||X + Y|^{p-1}) \leq (E|Y|^p)^{1/p} (E|X + Y|^p)^{1/q}.$$

Поэтому в силу (1.15)

$$E|X + Y|^p \leq (E|X + Y|^p)^{1/q} \left((E|X|^p)^{1/p} + (E|Y|^p)^{1/p} \right). \quad (1.16)$$

Если $E|X + Y|^p = 0$, то неравенство (1.14) очевидно. Если $E|X + Y|^p > 0$, то из (1.16) получаем:

$$(E|X + Y|^p)^{1-1/q} \leq (E|X|^p)^{1/p} + (E|Y|^p)^{1/p},$$

что и доказывает неравенство (1.14), поскольку $1 - 1/q = 1/p$. □

Лемма Бореля — Кантелли

В этом параграфе мы докажем простое, но важное утверждение, являющееся основным средством при исследовании свойств, выполняющихся с вероятностью единица.

Пусть A_1, A_2, \dots — последовательность событий, заданных на одном вероятностном пространстве, и пусть A есть событие, состоящее в том, что наступит бесконечно много событий A_k , то есть

$$A = \{A_k \text{ б. ч.}\} = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

Другими словами, событие A есть множество исходов ω , которые бесконечное число раз (бесконечно часто) встречаются в последовательности A_1, A_2, \dots

Лемма 1.5 (непрерывность вероятностной меры)

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) задана последовательность событий A_1, A_2, \dots

(i) Если $A_n \subseteq A_{n+1}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

(ii) Если $A_n \supseteq A_{n+1}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Лемма Бореля — Кантелли

Доказательство

(i) Обозначим $B_1 = A_1$ и $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$, $n \geq 1$. Тогда последовательность событий B_1, B_2, \dots состоит из попарно несовместных событий и $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$ для любого $n \geq 1$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P(A_n) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right).$$

(ii) Обозначим $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$ и $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$. Тогда события A, B_1, B_2, \dots попарно несовместны и $A_n = A \cup \left(\bigcup_{i \geq n} B_i\right)$ для любого $n \geq 1$. Следовательно, ряд $\sum_{i \geq 1} P(B_i)$ сходится и при $n \rightarrow \infty$

$$P(A_n) = P(A) + \sum P(B_i) \rightarrow P(A).$$

Лемма 1.6 (Бореля — Кантелли)

Если $\sum_{k \geq 1} P(A_k) < \infty$, то $P(A) = 0$.

Если $\sum_{k \geq 1} P(A_k) = \infty$ и события A_1, A_2, \dots независимы, то $P(A) = 1$.

Доказательство

Пусть $\sum_{k \geq 1} P(A_k) < \infty$. Тогда в силу леммы 1.5 (ii)

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq n} P(A_k),$$

откуда следует первое утверждение.

Доказательство

Если события A_1, A_2, \dots независимы, то таковыми же будут события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$. Тогда для любого $n \geq 1$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k\right) = \prod_{k=1}^n P(\bar{A}_k),$$

откуда нетрудно вывести, что для любого $n \geq 1$

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k\right) = \prod_{k=n}^{\infty} P(\bar{A}_k).$$

Доказательство

Из неравенства $1 - x \leq e^{-x}$ получаем:

$$\prod_{k=n}^{\infty} P(\bar{A}_k) = \prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)) \leq \exp \left\{ - \sum_{k \geq n} P(A_k) \right\} = 0.$$

Следовательно, для любого $n \geq 1$

$$P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k\right) = 1$$

и, значит, $P(A) = 1$. □

Замечание

Обозначим $v = \sum_{k=1}^{\infty} I_{A_k}$ — число появлений событий A_k . Тогда $E v = \sum_{k \geq 1} P(A_k)$, и первое утверждение леммы Бореля — Кантелли о том, что $E v < \infty$ влечёт $P(v < \infty) = 1$, выглядит тривиальным, тогда как второе, означающее, что $v < \infty$ с вероятностью 1 влечёт $E v < \infty$, оказывается весьма содержательным. Из него следует, что если $P(v < \infty) = 1$, но $E v = \infty$, то события A_k с необходимостью зависимы.