

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

ММФ НГУ, 2012 г.

ГЛАВА 1

Вероятностные неравенства

§1. Экспоненциальные неравенства.

Всюду в этом параграфе $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$.

Лемма 1.1. Пусть $EX = 0$ и $P(a \leq X \leq b) = 1$. Тогда для любого $\lambda > 0$

$$Ee^{\lambda X} \leq e^{\lambda^2(b-a)^2/8}.$$

Теорема 1.1 (неравенство Хёффдинга). Пусть $P(a_i \leq X_i \leq b_i) = 1$, $i \leq n$. Тогда для всех $x > 0$

$$P(S_n - ES_n \geq x) \leq \exp \left\{ - \frac{2x^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \right\}. \quad (1.1)$$

Следствие 1.1. Пусть $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 1/2$, $a_1, \dots, a_n$ — произвольные числа. Тогда для всех $x > 0$

$$P\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \geq x\right) \leq e^{-x^2/2B_n^2}, \quad (1.2)$$

где $B_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$.

Следствие 1.2 (неравенство Чернова). Пусть $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 1/2$. Тогда для всех $x > 0$

$$P(|S_n| \geq x) \leq 2e^{-x^2/2n}. \quad (1.3)$$

Следствие 1.3. Пусть $P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 1/2$. Тогда для всех $x > 0$

$$P(|S_n - n/2| \geq x) \leq 2e^{-2x^2/n}. \quad (1.4)$$

Теорема 1.2 (неравенство Петрова). Пусть существуют положительные постоянные T и $g_1, \dots, g_n$ такие, что

$$\mathbb{E}e^{tX_k} \leq e^{g_k t^2/2} \quad (1.5)$$

при $0 \leq t \leq T$. Тогда

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \begin{cases} e^{-x^2/2G}, & 0 \leq x \leq GT, \\ e^{-xT/2}, & x \geq GT, \end{cases} \quad (1.6)$$

где $G = g_1 + \dots + g_n$.

Лемма 1.2. Пусть X — случайная величина. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) Существует $T > 0$ такое, что $\mathbb{E}e^{tX} < \infty$ при $|t| < T$;
- (ii) Существует $a > 0$ такое, что $\mathbb{E}e^{a|X|} < \infty$;
- (iii) Существуют $b > 0$ и $c > 0$ такие, что $\mathbb{P}(|X| > t) \leq be^{-ct}$ для всех $t \geq 0$.

Если $\mathbb{E}X = 0$, то каждое из этих утверждений эквивалентно утверждению

- (iv) Существуют $g > 0$ и $T > 0$ такие, что $\mathbb{E}e^{tX} < \mathbb{E}e^{gt^2}$ при $|t| \leq T$.

Теорема 1.3 (неравенство Бернштейна). Пусть $\mathbb{E}X_k = 0$, $\sigma_k^2 = \mathbb{E}X_k^2 < \infty$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$ и пусть существует такая положительная постоянная H , что

$$\mathbb{E}|X_k|^m \leq \frac{m!}{2} \sigma_k^2 H^{m-2} \text{ для всех целых } m \geq 2.$$

Тогда

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \begin{cases} e^{-x^2/4B_n^2}, & 0 \leq x \leq B_n^2/H, \\ e^{-x/4H}, & x > B_n^2/H. \end{cases}$$

Лемма 1.3. Пусть $\mathbb{P}(X_j \leq y) = 1$ для некоторого $y > 0$ и всех $j \leq n$. Тогда для всех $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}e^{\lambda S_n} \leq \exp \left\{ \lambda \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_j + \frac{e^{\lambda y} - 1 - \lambda y}{y^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_j^2 \right\}.$$

Лемма 1.4. Пусть $\mathbb{P}(X_j \leq y) = 1$ для некоторого $y > 0$ и $\mathbb{E}X_j \leq 0$, $j \leq n$. Тогда для всех $x > 0$

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \exp \left\{ \frac{x}{y} - \frac{B_n^2 + xy}{y^2} \ln(1 + \frac{xy}{B_n^2}) \right\}, \quad (1.7)$$

где $B_n^2 = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}X_j^2$.

Теорема 1.4. Пусть выполнены условия леммы 1.4. Тогда для всех $x > 0$

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(B_n^2 + xy)} \right\}. \quad (1.8)$$

Следствие 1.4 (неравенство Бернштейна). Пусть $P(|X_j| \leq y) = 1$ и $EX_j = 0$. Тогда для всех $x > 0$

$$\begin{aligned} P(|S_n| \geq x) &\leq 2 \exp \left\{ \frac{x}{y} - \frac{B_n^2 + xy}{y^2} \ln \left(1 + \frac{xy}{B_n^2} \right) \right\} \leq \\ &\leq 2 \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(B_n^2 + xy)} \right\}. \end{aligned}$$

Теорема 1.5 (неравенство Нагаева – Фука). Пусть $y_1, \dots, y_n$ — произвольные положительные числа, $y = \max_{1 \leq j \leq n} y_j$, $F_j(x) = P(X_j < x)$, $\mu = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{y_j} x dF_j(x)$, $B^2 = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{y_j} x^2 dF_j(x)$. Тогда для всех $x > 0$

$$P(S_n \geq x) \leq \sum_{j=1}^n P(X_j \geq y_j) + \exp \left\{ \frac{x}{y} - \left(\frac{x - \mu}{y} + \frac{B^2}{y^2} \right) \ln \left(1 + \frac{xy}{B^2} \right) \right\}. \quad (1.9)$$

Следствие 1.5. Пусть в условиях теоремы 1.5 $EX_j = 0$. Тогда для всех $x > 0$

$$P(|S_n| \geq x) \leq \sum_{j=1}^n P(|X_j| \geq y_j) + 2 \exp \left\{ \frac{x}{y} - \frac{B^2 + xy}{y^2} \ln \left(1 + \frac{xy}{B^2} \right) \right\}.$$

Следствие 1.6. Пусть $y_1, \dots, y_n$ — произвольные положительные числа, $y = \max_{j \leq n} y_j$, $EX_j = 0$, $B_n^2 = \sum_{j=1}^n EX_j^2$. Тогда для всех $x > 0$

$$P(|S_n| \geq x) \leq \sum_{j=1}^n P(|X_j| \geq y_j) + 2 \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(B_n^2 + xy)} \right\}. \quad (1.10)$$

§2. Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин.

Всюду в этом параграфе $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Лемма 1.5. Пусть g — неотрицательная чётная функция, неубывающая на положительной полуоси, и такая, что $g(0) = 0$. Если $EG(X) < \infty$, то

$$EG(X) = \int_0^\infty P(|X| \geq t) dg(t). \quad (1.11)$$

Лемма 1.6. Пусть $E|X|^p < \infty$ для некоторого $p > 0$. Тогда

$$E|X|^p = p \int_0^\infty t^{p-1} P(|X| \geq t) dt. \quad (1.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство (1.12) имеет место и в случае, когда один из интегралов расходится: $E|X|^p = \infty$ тогда и только тогда, когда $\int_0^\infty t^{p-1}P(|X| \geq t) dt = \infty$.

Теорема 1.6 (неравенство Розенталя). Пусть $EX_j = 0$ и $E|X_j|^p < \infty$, $p \geq 2$. Тогда

$$E|S_n|^p \leq C(p) \left\{ \sum_{j=1}^n E|X_j|^p + \left(\sum_{j=1}^n EX_j^2 \right)^{p/2} \right\}, \quad (1.13)$$

где $C(p)$ — положительная постоянная, зависящая только от p .

Следствие 1.7. В условиях теоремы 1.6 имеет место неравенство

$$E|S_n|^p \leq c(p) n^{p/2-1} \sum_{k=1}^n E|X_k|^p,$$

где $c(p) = 2C(p)$.

Теорема 1.7. Пусть $EX_j = 0$ и $E|X_j|^p < \infty$, $p \geq 1$. Тогда

$$E|S_n|^p \leq C(p) \left\{ \sum_{j=1}^n E|X_j|^p + \left(\sum_{j=1}^n E|X_j|^p \right)^{p/2} \right\}, \quad (1.14)$$

где $C(p)$ — положительная постоянная, зависящая только от p .

§3. Неравенства для распределения максимума сумм независимых случайных величин.

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин, $S_k = X_1 + \dots + X_k$, $\bar{S}_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k$.

Лемма 1.7. Пусть на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданы событие A и случайная величина τ , принимающая только положительные целые значения ($A \in \mathcal{F}$ и $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}$, $k \geq 1$). Тогда для всех $n \geq 1$ имеет место неравенство

$$P(\tau \leq n) \leq \frac{P(A)}{\min_{1 \leq k \leq n} P(A | \tau = k)}. \quad (1.15)$$

Теорема 1.8. Для всех $x, y \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$P(\bar{S}_n \geq x) \leq \frac{P(S_n \geq x - y)}{\min_{1 \leq k \leq n} P(S_n - S_k \geq -y)}. \quad (1.16)$$

Следствие 1.8 (неравенство Леви – Колмогорова). Пусть $EX_j = 0$ и $DX_j < \infty$, тогда для всех $x \in \mathbb{R}$

$$P(\bar{S}_n \geq x) \leq 2P(S_n \geq x - \sqrt{2DS_n}). \quad (1.17)$$

Определение. Говорят, что две случайные величины *одинаково распределены*, и пишут $X \stackrel{d}{=} Y$, если $P(X \in B) = P(Y \in B)$ для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Определение. Говорят, что случайная величина X имеет *симметричное распределение*, если $X \stackrel{d}{=} -X$.

Отметим некоторые свойства симметричных случайных величин.

1. Если случайная величина X имеет симметричное распределение и её математическое ожидание существует, то $EX = 0$.

2. Если случайная величина X имеет симметричное распределение, то $P(X \geq 0) \geq 1/2$.

3. Если $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие симметричное распределение, то $S_n = X_1 + \dots + X_n$ имеет симметричное распределение.

Следствие 1.9 (неравенство Леви). Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины с симметричным распределением. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}$

$$P(\bar{S}_n \geq x) \leq 2P(S_n \geq x). \quad (1.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Применяя неравенство Леви (1.18) к случайным величинам $-X_j$, получаем

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} (-S_k) \geq x) \leq 2P(-S_n \geq x),$$

и, следовательно, для всех $x > 0$

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x) \leq 2P(|S_n| \geq x). \quad (1.19)$$

Определение. Медианой случайной величины X называется любое число $\text{med}(X)$, удовлетворяющее неравенствам

$$P(X \geq \text{med}(X)) \geq 1/2 \quad \text{и} \quad P(X \leq \text{med}(X)) \geq 1/2.$$

Медиана существует у любой случайной величины, но может быть не единственна.

Пусть случайная величина X имеет функцию распределения F . Если уравнение $F(t) = 1/2$ имеет единственное решение, то это решение и является медианой.

Если уравнение $F(t) = 1/2$ имеет бесконечно много решений, то существует отрезок I такой, что $F(t) = 1/2$ для всех $t \in I$. Любая точка этого отрезка является медианой.

Если же уравнение $F(t) = 1/2$ не имеет решений, то найдется точка t_0 такая, что $F(t_0) < 1/2$ и $F(t_0 + 0) \geq 1/2$. Эта точка t_0 и будет медианой.

Отметим также, что

$$F(\text{med}(X)) \leq \frac{1}{2} \leq F(\text{med}(X) + 0)$$

и $\text{med}(-X) = -\text{med}(X)$. В частности, если X имеет симметричное распределение, то $\text{med}(X) = 0$.

Следствие 1.10. Для всех $x \in \mathbb{R}$

$$P(\bar{S}_n \geq x) \leq 2P(S_n \geq x - \max_{1 \leq k \leq n} \text{med}(S_k - S_n)).$$

Лемма 1.8. Пусть случайные величины X и τ заданы на одном вероятностном пространстве, $X > 0$, $\tau \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $n \geq 1$

$$P(\tau \leq n) \leq \frac{EX}{\min_{1 \leq k \leq n} E(X|\tau = k)}.$$

Теорема 1.9. Пусть g — неотрицательная и неубывающая функция. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}$

$$P(\bar{S}_n \geq x) \leq \frac{Eg(S_n)}{\min_{1 \leq k \leq n} Eg(S_n - S_k + x)}. \quad (1.20)$$

Следствие 1.11. Пусть $EX_j = 0$ и пусть g — неотрицательная, неубывающая и выпуклая функция. Тогда для всех x таких, что $g(x) > 0$

$$P(\bar{S}_n \geq x) \leq \frac{Eg(S_n)}{g(x)}. \quad (1.21)$$

Следствие 1.12 (неравенство Колмогорова). Пусть $EX_j = 0$, $DX_j < \infty$. Тогда для всех $x > 0$

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x) \leq \frac{DS_n}{x^2}. \quad (1.22)$$

Следствие 1.13 (неравенство Хайека — Реньи). Пусть $EX_j = 0$, $EX_j^2 < \infty$. Пусть также $0 < c_n \leq c_{n-1} \leq \dots \leq c_1$. Тогда для всех $x > 0$ и $m < n$

$$P(\max_{m \leq k \leq n} c_k |S_k| \geq x) \leq \frac{1}{x^2} \left(c_m^2 \sum_{k=1}^m EX_k^2 + \sum_{k=m+1}^n c_k^2 EX_k^2 \right). \quad (1.23)$$

Теорема 1.10. Пусть $EX_j = 0$ и пусть $P(|X_j| \leq c) = 1$ для некоторого $c > 0$. Тогда для всех $x > 0$

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x) \geq 1 - \frac{(x + c)^2}{B_n^2}, \quad (1.24)$$

$$\text{где } B_n^2 = DS_n = \sum_{j=1}^n DX_j.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x) \leq \delta$ для некоторого $0 < \delta < 1$, то

$$\sum_{j=1}^n DX_j \leq x^2 + (x + c)^2 \frac{\delta}{1 - \delta}.$$

§4. Неравенства симметризации.

Определение. Пусть X и X' — независимые одинаково распределённые случайные величины. Тогда *симметризацией* X называется случайная величина $X^s = X - X'$.

Лемма 1.9. Для всех $x > 0$ имеет место неравенство

$$P(X^s \geq x) \geq \frac{1}{2}P(X - \text{med}(X) \geq x), \quad (1.25)$$

где $\text{med}(X)$ — медиана случайной величины X .

Теорема 1.11 (слабое неравенство симметризации). Для всех $x > 0$ и $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}P(|X - \text{med}(X)| \geq x) \leq P(|X^s| \geq x) \leq 2P(|X - a| \geq x/2). \quad (1.26)$$

Теорема 1.12 (сильное неравенство симметризации). Для всех $x > 0$ и $n \geq 1$

$$P(\sup_{k \geq n} |S_k^s| \geq x) \geq \frac{1}{2}P(\sup_{k \geq n} |S_k - \text{med}(S_k)| \geq x). \quad (1.27)$$

Лемма 1.10. Для всех $x > 0$

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| \geq x) \leq P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x/2). \quad (1.28)$$

Теорема 1.13 (неравенство Леви – Рогозина). Для всех $x > 0$ и $a \in \mathbb{R}$

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k - \text{med}(X_k)| \geq x) \leq 8P(|S_n - a| \geq x/4). \quad (1.29)$$

Следствие 1.14. Пусть для некоторых $x > 0$ и $a \in \mathbb{R}$

$$P(|S_n - a| \geq x/4) \leq 1/16.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^n P(|X_k - \text{med}(X_k)| \geq x) \leq 16P(|S_n - a| \geq x/4). \quad (1.30)$$

Следствие 1.15. Пусть $P(|X_j| \leq y) = 1$ для некоторого $y > 0$. Пусть также

$$P(|S_n - a| \geq x) \leq 1/8$$

для некоторых $x > 0$ и $a \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n DX_j \leq 4(x + y)^2.$$

ГЛАВА 2

Законы больших чисел и ряды случайных величин

§1. Лемма Бореля – Кантелли.

Пусть $A_1, A_2, \dots$ — последовательность событий, заданных на одном вероятностном пространстве, и пусть A есть событие, состоящее в том, что наступит бесконечно много событий A_k , т. е.

$$A = \{A_k \text{ б. ч.}\} = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

Другими словами, событие A есть множество исходов ω , которые бесконечное число раз (бесконечно часто) встречаются в последовательности $A_1, A_2, \dots$

Лемма 2.1 (непрерывность вероятностной меры). Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задана последовательность событий $A_1, A_2, \dots$

а) Если $A_n \subseteq A_{n+1}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

б) Если $A_n \supseteq A_{n+1}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Лемма 2.2 (Бореля – Кантелли). (i) Если $\sum_{k \geq 1} P(A_k) < \infty$, то $P(A) = 0$.

(ii) Если $\sum_{k \geq 1} P(A_k) = \infty$ и события $A_1, A_2, \dots$ независимы, то $P(A) = 1$.

Лемма 2.3. Пусть X — случайная величина. Тогда $E|X| < \infty$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k \geq 1} P(|X| \geq k) < \infty$.

Лемма 2.4. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Тогда либо $E|X_1| < \infty$ и с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий $\{|X_k| \geq k\}$, либо $E|X_1| = \infty$ и события $\{|X_k| \geq k\}$ с вероятностью 1 происходят бесконечно часто.

§2. Виды сходимости последовательностей случайных величин.

Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ — случайные величины, заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Определение. Говорят, что последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ *сходится по вероятности* к X , и пишут $X_n \xrightarrow{P} X$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Определение. Говорят, что последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ *сходится к X почти наверное*, и пишут $X_n \rightarrow X$ п. н., если

$$P(\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)) = 1.$$

Лемма 2.5. Соотношение $X_n \rightarrow X$ п. н. равносильно любому из следующих утверждений:

(i) Для любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 происходит лишь конечное число событий $\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$.

(ii) $\sup_{k \geq n} |X_k - X| \xrightarrow{P} 0$ при $n \rightarrow \infty$.

(iii) Для любого $\varepsilon > 0$ $P\left(\bigcup_{k \geq n} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\}\right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 2.6. Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность положительных чисел таких, что $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon_n) < \infty,$$

то $X_n \rightarrow 0$ п. н.

Лемма 2.7. (i) Если $\sum_{n \geq 1} P(|X_n| \geq \varepsilon) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$, то $X_n \rightarrow 0$ п. н.

(ii) Если $X_1, X_2, \dots$ независимы, то $\sum_{n \geq 1} P(|X_n| \geq \varepsilon) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда $X_n \rightarrow 0$ п. н.

Лемма 2.8. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $\alpha > 0$. Тогда

$$\frac{X_n}{n^{1/\alpha}} \rightarrow 0 \quad \text{п. н.} \quad (2.1)$$

тогда и только тогда, когда $E|X_1|^\alpha < \infty$.

Определение. Говорят, что последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ *сходится к X в среднем порядка p* , $0 < p < \infty$, и пишут $X_n \xrightarrow{L_p} X$, если

$$E|X_n - X|^p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Определение. Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ *фундаментальна по вероятности*, если $|X_n - X_m| \xrightarrow{P} 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Определение. Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ *фундаментальна почти наверное*, если $\sup_{n \geq m} |X_n - X_m| \xrightarrow{P} 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Определение. Последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ *фундаментальна в среднем порядка p* , если $E|X_n - X_m|^p \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Теорема 2.1 (критерий сходимости Коши). *Сходимость $X_n \rightarrow X$ в каком-нибудь смысле ($\xrightarrow{P}$, $\xrightarrow{n. н.}$, $\xrightarrow{L_p}$) имеет место тогда и только тогда, когда последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ фундаментальна в соответствующем смысле.*

§3. Слабый закон больших чисел.

Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$ удовлетворяет *слабому закону больших чисел*, если существуют такие последовательности постоянных $\{a_n\}_{n \geq 1}$ и $\{b_n\}_{n \geq 1}$, $0 < b_n \uparrow \infty$, что

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n X_k - a_n \xrightarrow{P} 0. \quad (2.2)$$

Теорема 2.2 (слабый закон больших чисел). *Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Для того чтобы*

$$\frac{S_n}{n} - E(X_1 I\{|X_1| < n\}) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$nP(|X_1| \geq n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Теорема 2.3. *Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Если $E|X_1| < \infty$, то*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} EX_1.$$

Теорема 2.4 (слабый закон больших чисел Марцинкевича — Зигмунда). *Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Пусть $E|X_1|^\alpha < \infty$ для некоторого $0 < \alpha < 2$ и пусть $EX_1 = 0$ в случае $1 \leq \alpha < 2$. Тогда*

$$\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Пусть $\{b_n\}_{n \geq 1}$ — возрастающая последовательность положительных чисел: $b_n > 0$, $b_n \uparrow \infty$. Определим *срезку* $X^{[\varepsilon]}$ случайной величины X равенством

$$X^{[\varepsilon]} = XI\{|X| < \varepsilon\} = \begin{cases} X, & |X| < \varepsilon; \\ 0, & |X| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Теорема 2.5. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин. Обозначим $\mu_n = \sum_{k=1}^n E(X_k I\{|X_k| < b_n\})$. Если выполнены условия

$$\sum_{k=1}^n P(|X_k| \geq b_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

и

$$\frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^n D X_k^{[b_n]} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

то

$$\frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Если $S_n/b_n \xrightarrow{P} 0$, то справедливы соотношения (2.6), (2.7) и $\mu_n/b_n \rightarrow 0$.

§4. Сходимость рядов независимых случайных величин.

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность случайных величин, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Цель настоящего параграфа — дать критерии, позволяющие определять, сходится или расходится ряд из независимых случайных величин.

Определение. Ряд случайных величин $\sum_{k \geq 1} X_k$ *сходится с вероятностью 1*, если последовательность частичных сумм S_n фундаментальна почти наверное, т. е. с вероятностью 1 существует конечный предел $S(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega)$.

Для $\varepsilon > 0$ положим $X^{[\varepsilon]} = XI\{|X| < \varepsilon\}$.

Лемма 2.9. (i) Если ряд $\sum_{k \geq 1} X_k$ сходится с вероятностью 1, то $X_n \rightarrow 0$ п. н.

(ii) Если ряд $\sum_{k \geq 1} X_k$ сходится с вероятностью 1 и случайные величины $X_1, X_2, \dots$ независимы, то $\sum_{k \geq 1} P(|X_k| \geq \varepsilon) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$.

(iii) Если $\sum_{k \geq 1} P(|X_k| \geq \varepsilon) < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то ряд $\sum_{k \geq 1} X_k$ сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда с вероятностью 1 сходится ряд $\sum_{k \geq 1} X_k^{[\varepsilon]}$.

(iv) Если ряд $\sum_{k \geq 1} (X_k - EX_k)$ сходится с вероятностью 1, то ряд $\sum_{k \geq 1} X_k$ сходится с вероятностью 1 в том и только в том случае, когда сходится ряд $\sum_{k \geq 1} EX_k$.

Теорема 2.6 (критерий Колмогорова). Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин, $EX_k = 0$, $k \geq 1$. Если $\sum_{k \geq 1} DX_k < \infty$, то ряд $\sum_{k \geq 1} X_k$ сходится с вероятностью 1.

Следствие 2.1. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин и пусть $\sum_{k \geq 1} DX_k < \infty$. Тогда ряд $\sum_{k \geq 1} X_k$ сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k \geq 1} EX_k$.

Теорема 2.7. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин и пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ сходятся ряды

$$\sum_{k \geq 1} P(|X_k| \geq \varepsilon) \quad \text{и} \quad \sum_{k \geq 1} DX_k^{[\varepsilon]}$$

Тогда

- (i) Ряд $\sum_{k \geq 1} (X_k - EX_k^{[\varepsilon]})$ сходится с вероятностью 1;
- (ii) Ряд $\sum_{k \geq 1} X_k$ сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда $\sum_{k \geq 1} EX_k^{[\varepsilon]} < \infty$.

Теорема 2.8. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин и пусть $P(|X_k| \leq c) = 1$ для некоторого $c > 0$. Тогда для сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} X_k$ с вероятностью 1 необходимо и достаточно сходимости рядов $\sum_{k \geq 1} EX_k$ и $\sum_{k \geq 1} DX_k$.

Теорема 2.9 (критерий трёх рядов). Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин. Для сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} X_k$ с вероятностью 1 необходимо, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ сходились ряды

$$\sum_{k \geq 1} P(|X_k| \geq \varepsilon), \quad \sum_{k \geq 1} DX_k^{[\varepsilon]}, \quad \sum_{k \geq 1} EX_k^{[\varepsilon]},$$

и достаточно, чтобы эти ряды сходились при некотором $\varepsilon > 0$.

§5. Усиленный закон больших чисел.

Всюду далее $\{b_n\}_{n \geq 1}$ — возрастающая последовательность положительных чисел: $b_n > 0$, $b_n \uparrow \infty$.

Лемма 2.10 (Тёплица). Пусть $\{a_j\}_{j \geq 1}$ — последовательность неотрицательных чисел такая, что $b_n = \sum_{j=1}^n a_j \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть также $\{x_j\}_{j \geq 1}$ — числовая последовательность такая, что $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n a_j x_j \rightarrow x. \quad (2.9)$$

В частности, если $x_n \rightarrow x$, то

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \rightarrow x. \quad (2.10)$$

Лемма 2.11 (Кронекера). Пусть $\{c_j\}_{j \geq 1}$ — числовая последовательность такая, что ряд $\sum_{j \geq 1} c_j/b_j$ сходится. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n c_j \rightarrow 0.$$

Следствие 2.2. Если ряд $\sum_{j \geq 1} X_j/b_j$ сходится с вероятностью 1, то имеет место усиленный закон больших чисел:

$$\frac{S_n}{b_n} \rightarrow 0 \text{ п. н.}$$

Теорема 2.10 (Колмогорова). Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин и пусть $DX_j < \infty$. Если $\sum_{j \geq 1} DX_j/b_j^2 < \infty$, то

$$\frac{S_n - ES_n}{b_n} \rightarrow 0 \text{ п. н.}$$

Следствие 2.3. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с $DX_1 < \infty$. Тогда $S_n/n \rightarrow EX_1$ п. н.

Теорема 2.11. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин и пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнены следующие условия

$$\sum_{j \geq 1} P(|X_j| \geq \varepsilon b_j) < \infty, \quad (2.11)$$

$$\sum_{j \geq 1} DX_j^{[\varepsilon b_j]}/b_j^2 < \infty, \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^n EX_j^{[\varepsilon b_j]} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Тогда

$$\frac{S_n}{b_n} \rightarrow 0 \text{ п. н.}$$

Теорема 2.12. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин и пусть $S_n/b_n \rightarrow 0$ п. н. Тогда для всех $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j \geq 1} \mathbf{P}(|X_j| \geq \varepsilon b_j) < \infty. \quad (2.14)$$

Теорема 2.13 (усиленный закон больших чисел Марцинкевича – Зигмунда). Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $0 < \alpha < 2$. Для сходимости

$$\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \rightarrow 0 \text{ п. н.}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{E}|X_1|^\alpha < \infty$ и $\mathbf{E}X_1 = 0$ в случае $1 \leq \alpha < 2$.

Следствие 2.4 (усиленный закон больших чисел Колмогорова). Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Для того чтобы существовала такая постоянная a , что

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow a \text{ п. н.}, \quad (2.15)$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\mathbf{E}|X_1| < \infty.$$

Если это условие выполнено, то (2.15) имеет место с $a = \mathbf{E}X_1$.

§6. Оценки скорости сходимости в законах больших чисел.

Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Теорема 2.14. Пусть $\alpha > 0$. Тогда следующие утверждения равносильны:

(i) Для всех $\varepsilon > 0$

$$n^\alpha \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

(ii)

$$n^{\alpha+1} \mathbf{P}(|X_1| \geq n) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}(X_1 I\{|X_1| < n\}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

(iii) Для всех $\varepsilon > 0$

$$n^\alpha \mathbf{P}\left(\sup_{k \geq n} \left|\frac{S_k}{k}\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Теорема 2.15. Пусть $\mathbf{E}X_1 = 0$ и $\mathbf{E}|X_1|^p < \infty$ для некоторого $p \geq 1$. Тогда для всех $\varepsilon > 0$

$$n^{p-1} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ГЛАВА 3

Закон повторного логарифма

§1. Законы нуля и единицы.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задана последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n \geq 1}$. Пусть $\mathcal{F}_1^n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ есть σ -алгебра, порождённая случайными величинами $X_1, \dots, X_n$, а $\mathcal{F}_n^\infty = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ — σ -алгебра, порождённая случайными величинами $X_n, X_{n+1}, \dots$, и пусть

$$\mathcal{X} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n^\infty.$$

σ -алгебра $\mathcal{X}$ называется *хвостовой* или *остаточной*.

Поскольку для любого $k \geq 1$ событие

$$A_1 = \left\{ \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ сходится} \right\} = \left\{ \text{ряд } \sum_{n=k}^{\infty} X_n \text{ сходится} \right\} \in \mathcal{F}_k^\infty,$$

то $A_1 \in \mathcal{X}$. Следующие события также являются остаточными:

$$\begin{aligned} A_2 &= \{ \text{предел } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ существует} \}; \\ A_3 &= \{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} < C \}; \\ A_4 &= \{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \ln \ln n}} = 1 \}; \\ A_5 &= \{ X_n \in B_n \text{ для бесконечно многих } n \}, \quad B_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

С другой стороны, событие $\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n > 0 \}$, вообще говоря, не является остаточным.

Теорема 3.1 (закон 0 и 1 Колмогорова). Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин и $A \in \mathcal{X}$. Тогда $P(A) = 0$ или $P(A) = 1$.

Следствие 3.1. Пусть X — случайная величина, измеримая относительно остаточной σ -алгебры $\mathcal{X}$, т. е. $\{X \in B\} \in \mathcal{X}$ для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Тогда существует постоянная c , $-\infty \leq c \leq \infty$, такая, что $P(X = c) = 1$.

§2. Предварительные оценки.

Всюду в этом параграфе $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с нулевым средним. Как показано в теореме 2.13, при этих предположениях $S_n = o(n)$ п. н. и, вообще говоря, при этих условиях нельзя утверждать что-либо большее. Но если наложить дополнительные ограничения на распределение величин X_i , то, оказывается, можно получить очень точные результаты при весьма общих условиях.

Определение. Будем говорить, что последовательность случайных величин $X_n = O(b_n)$ п. н., где $\{b_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность положительных чисел, если для некоторой постоянной $C > 0$ события $\{|X_n| \geq Cb_n\}$ с вероятностью 1 происходят лишь конечное число раз.

Мы начнём изучение закона повторного логарифма с рассмотрения простейшего случая — симметричной схемы Бернулли: $P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 1/2$. Это вполне естественно; тем более, что это соответствует историческому ходу исследований. Ранние результаты таковы.

В 1913 г. Ф. Хаусдорф показал, что $S_n = O(n^{1/2+\varepsilon})$ п. н. для всех $\varepsilon > 0$.

В 1914 г. Г. Харди и Дж. Литтлвуд доказали более сильное утверждение, согласно которому с вероятностью 1 отношение $|S_n|/\sqrt{n \ln n}$ остаётся ограниченным:

$$S_n = O(\sqrt{n \ln n}) \text{ п. н.}$$

В 1922 г. Г. Штейнгауз уточнил результат Харди и Литтлвуда, показав, что с вероятностью 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln n}} \leq 1.$$

В 1923 г. А. Я. Хинчин получил для роста сумм S_n оценку

$$S_n = O(\sqrt{n \ln \ln n}) \text{ п. н.,}$$

а в 1924 г. им же был получен окончательный результат — *закон повторного логарифма*:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1 \quad \text{п. н.}$$

В 1929 г. А. Н. Колмогоров обобщил результат Хинчина на широкий класс независимых случайных величин.

Мы изложим эти результаты в их историческом порядке, однако не будем ограничиваться лишь случаем схемы Бернулли.

Лемма 3.1 (оценка Хаусдорфа). Пусть $E|X_1|^m < \infty$ для всех $m \geq 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$S_n = O(n^{1/2+\varepsilon}) \text{ п. н.}$$

Лемма 3.2 (оценка Харди — Литтлвуда). Пусть $|X_n| \leq C$ п. н. Тогда $S_n = O(\sqrt{n \ln n})$ п. н.

Теорема 3.2. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1 \quad \text{п. н.} \quad (3.1)$$

§3. Вспомогательные утверждения.

Определим функцию $L(x) = \ln \ln x$ при $\ln x \geq e$ и $L(x) = 1$ при $\ln x < e$. Для каждого $n \geq 1$ положим $a_n = \sqrt{2nL(n)}$.

Лемма 3.3. Функция $b(x) = x/L(x)$ — непрерывная, неограниченная и строго возрастающая в области $x > 0$.

Лемма 3.4. Существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq C \frac{n}{a_n}. \quad (3.2)$$

Лемма 3.5. Пусть $\lambda > 1$ и $n_k = [\lambda^k]$. Тогда последовательность $\{n_k\}_{k \geq 1}$ удовлетворяет следующим свойствам:

- (i) $n_k \uparrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$;
- (ii) существует $k_0 \geq 1$ такое, что для всех $k \geq k_0$

$$a_{n_{k+1}} < \lambda a_{n_k}; \quad (3.3)$$

(iii) для любого $\alpha > 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\ln n_k)^{-\alpha} < \infty. \quad (3.4)$$

Лемма 3.6. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин. Если $S_n/a_n \xrightarrow{P} 0$ и существуют $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $c > 0$ и $n_0 \geq 1$ такие, что для всех $n \geq n_0$

$$P(|S_n/a_n| \geq \beta) \leq c e^{-\alpha L(n)}, \quad (3.5)$$

то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{a_n} \leq \beta \quad \text{п. н.} \quad (3.6)$$

Лемма 3.7. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин с $EX_n = 0$ и $\sup_{n \geq 1} EX_n^2 < \infty$. Если $|X_n| \leq \tau(n/L(n))^{1/2}$ п. н. для некоторого $\tau > 0$ и всех $n \geq 1$, то для всех $x > 0$, $a \geq (\sup_{n \geq 1} EX_n^2)^{1/2}$ и $n \geq 1$

$$P(S_n/a_n \geq x) \leq \exp \left\{ - \left(\frac{x}{a} \right)^2 L(n) \left(2 - e^{\sqrt{2}x\tau/a^2} \right) \right\}. \quad (3.7)$$

Лемма 3.8. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с $EX_1^2 < \infty$. Тогда для любого $\tau > 0$

$$\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^n X_j I\{|X_j| \geq \tau(j/L(j))^{1/2}\} \rightarrow 0 \quad \text{н. н.} \quad (3.8)$$

Лемма 3.9. Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с $EX_1 = 0$ и $EX_1^2 = 1$. Пусть последовательности $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ и $\{m_n\}_{n \geq 1}$ таковы, что

$$0 < \alpha_n \uparrow \infty, \quad 1 \leq m_n \uparrow \infty, \quad \frac{\alpha_n}{m_n} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{m_n}{\alpha_n^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда для всех $\varepsilon > 0$ и $b \in \mathbb{R}$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{m_n}{\alpha_n^2} \ln P(|S_{m_n}/\alpha_n - b| < \varepsilon) \geq -b^2/2. \quad (3.9)$$

§4. Закон повторного логарифма Хартмана – Винтнера.

Теорема 3.3 (закон повторного логарифма Хартмана – Винтнера). Пусть $\{X_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с $EX_1 = 0$ и $EX_1^2 = 1$. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} \leq 1 \quad \text{н. н.} \quad (3.10)$$

и каждая точка отрезка $[-1, 1]$ является предельной (в смысле сходимости почти наверное) для последовательности $\{S_n/(2n \ln \ln n)^{1/2}\}_{n \geq 1}$. В частности,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1 \quad \text{н. н.}$$

To be continued...