Вопросы к коллоквиуму по теории вероятностей

1. Задать каким-либо образом вероятность на $\Omega = \{a,\ b,\ c,\ d\}$.

2. Задать каким-либо образом вероятность на множестве натуральных чисел $\Omega = \{1,\ 2,\ \ldots\}$.

3. Дать описание всех способов задания вероятности на трехэлементном множестве $\Omega = \{a,\ b,\ c\}$.

4. Привести пример конечного пространства элементарных исходов и таких событий A и B в нем, что они не могут произойти одновременно. Указать, какому неравенству удовлетворяют в этом случае $\mathbf{P}(A)$ и $\mathbf{P}(B)$.

5. Привести пример конечного пространства элементарных исходов и таких событий A и B в нем, что событие A влечет событие B. Указать, какому неравенству удовлетворяют в этом случае $\mathbf{P}(\overline{A})$ и $\mathbf{P}(\overline{B})$.

6. Привести пример конечного пространства элементарных исходов и таких событий A и B в нем, что они могут произойти одновременно. Выразить $\mathbf{P}((A\backslash B) \cup (B\backslash A))$ через $\mathbf{P}(A \cup B)$ и $\mathbf{P}(AB)$.

7. Привести пример конечного пространства элементарных исходов и таких событий A и B в нем, что A происходит тогда и только тогда, когда B не происходит. Для произвольного события C выразить $\mathbf{P}(AC)$ через $\mathbf{P}(BC)$ и $\mathbf{P}(C)$.

8. Формула для числа перестановок. Найти вероятность того, что N различных чисел, расставленных в произвольном порядке, расположились в порядке убывания.

9. Статистика Максвелла — Больцмана. Найти вероятность того, что во взятом наудачу телефонном номере последние четыре цифры четные.

10. Формула для числа размещений. Найти вероятность того, что во взятом наудачу телефонном номере последние три цифры различны.

11. Статистика Бозе — Эйнштейна. Найти число различных состояний системы из трех бозонов, каждый из которых может находиться в одном из трех состояний.

12. Статистика Ферми — Дирака. Найти число различных состояний системы из трех фермионов, каждый из которых может находиться в одном из пяти состояний.

13. Статистики Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака. Найти число различных состояний системы из двух бозонов и одного фермиона, каждый из которых может находиться в одном из трех состояний.

14. Гипергеометрическое распределение. Найти вероятность угадать все 6 номеров в лотерее «6 из 49».

15. Геометрическая вероятность на отрезке. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу на отрезок, окажется ближе к середине отрезка, чем к любому из его концов.

16. Геометрическая вероятность на отрезке. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу на отрезок, окажется ближе к середине отрезка, чем к его правому концу.

17. Геометрическая вероятность на плоской области. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в квадрат, окажется ближе к центру квадрата, чем к любому из его углов.

18. Геометрическая вероятность на плоской области. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в квадрат, окажется ближе к центру квадрата, чем к середине любой из его сторон.

19. Докажите, что нельзя задать геометрическую вероятность на всей вещественной прямой.

20. Геометрическая вероятность на плоской области. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в круг, окажется ближе к центру круга, чем к окружности.

21. Геометрическая вероятность на пространственной области. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в шар, окажется ближе к центру шара, чем к сфере.

22. Задать вероятность на отрезке $[0;\ 1]$ так, чтобы она не соответствовала ни континуальной, ни дискретной модели.

23. Задать вероятность на интервале $(0;\ +\infty)$ так, чтобы она не соответствовала ни континуальной, ни дискретной модели.

24. Пусть на множестве Ω задана мера μ — неотрицательная сигма-аддитивная функция множеств. Выведите формулу для $\mu(\overline{A})$ в предположении, что $\mu(\Omega) < \infty$.

25. Пусть на множестве Ω задана мера μ — неотрицательная сигма-аддитивная функция множеств. Выведите формулу, связывающую $\mu(A \cup B)$ и $\mu(AB)$.

26. Пусть на множестве Ω задана мера μ — неотрицательная сигма-аддитивная функция множеств. Покажите на примере, что формула $\mu(A) = 1 - \mu(\overline{A})$ может не иметь места.

27. Задайте вероятность на вещественной прямой так, чтобы $\mathbf{P}([-1000;\ 1000]) = 0$.

28. Дать описание всех способов задания меры (неотрицательной сигма-аддитивной функции множеств) на трехэлементном множестве $\Omega = \{a,\ b,\ c\}$.

29. $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B) = 1$. Следует ли отсюда независимость событий A и B?

30. $\mathbf{P}(A) \geq \mathbf{P}(B) = 0$. Следует ли отсюда независимость событий A и B?

31. $0 < \mathbf{P}(A) < \mathbf{P}(B) < 1$. Следует ли отсюда независимость событий A и B?

32. Определение независимости трех событий. Пусть события A, B и C независимы. Выразить через их вероятности вероятность события $A \cup B \cup C$.

33. Вероятность фиксированной последовательности «успехов». Найти вероятность того, что при 7 подбрасываниях симметричной монеты «орлы» и «решки» будут чередоваться.

34. Формула Бернулли. Найти вероятность того, что при 5 подбрасываниях игральной кости цифра «6» выпала 3 раза, причем в том числе при последнем подбрасывании.

35. Формула Бернулли. Доказать, что минимум вероятности события «либо ни одного успеха, либо ни одной неудачи» в n испытаниях достигается при подбрасывании симметричной монеты.

36. Найти $\mathbf{P}(B|B)$.

37. Найти $\mathbf{P}(B|\overline{B})$.

38. Доказать, что $\mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(\overline{A}|B) = 1$.

39. Получить формулу для $\mathbf{P}(A|B)$ в случае, когда $A \subset B$.

40. Получить формулу для $\mathbf{P}(A|B)$ в случае, когда $B \subset A$.

41. Показать, что может быть $\mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(A|\overline{B}) < 1$.

42. Показать, что может быть $\mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(A|\overline{B}) > 1$.

43. Задать функцию распределения случайной величины, принимающей с равными вероятностями значения 0; 1/2 и 1.

44. Выразить $\mathbf{P}\{|X| > a\}$ через функцию распределения случайной величины X.

45. Выразить $\mathbf{P}\{|X| \geq a\}$ через функцию распределения случайной величины X.

46. Выразить $\mathbf{P}\{|X - a| > 0\}$ через функцию распределения случайной величины X.

47. Выразить $\mathbf{P}\{aX > 0\}$ через функцию распределения случайной величины X.

48. Выразить $\mathbf{P}\{aX \geq 0\}$ через функцию распределения случайной величины X.

49. Выразить $\mathbf{P}\{aX < 0\}$ через функцию распределения случайной величины X.

50. Выразить плотность распределения случайной величины $|X|$ через плотность распределения случайной величины X.

51. Выразить плотность распределения случайной величины $Y = -X$ через плотность распределения случайной величины X.

52. Выразить плотность распределения случайной величины $Y = X^2$ через плотность распределения случайной величины X.

53. Выразить плотность распределения случайной величины $Y = \sqrt{|X|}$ через плотность распределения случайной величины X.

54. Пусть случайная величина X имеет абсолютно непрерывное распределение. Каким свойством должна обладать ее функция распределения, чтобы случайная величина $Y = \max(X,\ 0)$ тоже имела абсолютно непрерывное распределение?

55. Пусть случайная величина X имеет абсолютно непрерывное распределение. Каким свойством должна обладать ее функция распределения, чтобы случайная величина $Y = \min(X,\ 0)$ тоже имела абсолютно непрерывное распределение?

56. Пусть случайная величина X имеет абсолютно непрерывное распределение. Каким свойством должна обладать ее функция распределения, чтобы случайная величина $Y = \max(|X|,\ 1)$ тоже имела абсолютно непрерывное распределение?

57. Задать симметричное относительно нуля распределение случайной величины X такое, чтобы $|X|$ имел распределение Бернулли с параметром p.

58. Задать симметричное относительно нуля распределение случайной величины X такое, чтобы $|X|$ имел распределение Пуассона с параметром λ.

59. Задать симметричное относительно нуля распределение случайной величины X такое, чтобы $|X|$ имел показательное распределение с параметром α.

60. Задать плотность распределения такую, чтобы функция распределения строго возрастала всюду на вещественной прямой.

61. Найти распределение случайной величины cX, если X имеет равномерное распределение на $[a;\ b]$.

62. Найти распределение случайной величины cX, если X имеет показательное распределение с параметром α.

63. Найти распределение случайной величины cX, если X имеет нормальное распределение с параметрами $\alpha,\ \sigma^2$.

64. Задать какое-либо распределение трехмерного дискретного случайного вектора так, чтобы его компоненты имели невырожденные распределения.

65. Задать какое-либо распределение двумерного дискретного случайного вектора так, чтобы одна из его компонент имела вырожденное распределение.

66. Найти двумерную плотность случайного вектора, распределенного равномерно в единичном круге с центром в начале координат.

67. Задать какое-либо распределение двумерного случайного вектора так, чтобы оно не было ни дискретным, ни абсолютно непрерывным двумерным распределением.

68. Привести пример двумерного распределения, имеющего положительную плотность распределения на всей плоскости.

69. Найти распределение случайного вектора $c\vec{X}$, если $\vec{X}$ равномерно распределен в единичном круге с центром в начале координат.

70. Найти плотность распределения случайного вектора $c\vec{X}$, если $\vec{X}$ имеет стандартное трехмерное нормальное распределение.

71. Дать определение независимости двух случайных величин. Привести пример совместного распределения двух независимых случайных величин.

72. Дать определение независимости трех случайных величин. Доказать, что если случайные величины X и Y независимы, а Z имеет вырожденное распределение, то X, Y и Z независимы в совокупности.

73. Найти таблицу распределения минимума из двух бернуллиевских независимых случайных величин.

74. Найти таблицу распределения максимума из двух бернуллиевских независимых случайных величин.

75. Найти таблицу распределения разности двух бернуллиевских независимых случайных величин.

76. Найти плотность распределения минимума из двух показательных независимых случайных величин.

77. Найти плотность распределения максимума из двух показательных независимых случайных величин.

78. Найти вероятность того, что сумма 4 независимых пуассоновских случайных величин с параметром $1/2$ равна 1.

79. Найти, сколько независимых пуассоновских случайных величин с параметром 1 надо просуммировать, чтобы сумма была положительна с вероятностью не менее 0,99.

80. Случайные величины X и Y независимы, X имеет показательное распределение с параметром 2,5 а $X + Y$ имеет гамма-распределение с параметрами $\lambda = \alpha = 2,5$. Найти, какое распределение должна иметь случайная величина Y.

81. Случайные величины X и Y независимы, имеют одно и то же показательное распределение, $\min(X,\ Y)$ имеет показательное распределение с параметром 1. Найти плотность распределения их суммы $X + Y$.

82. Случайные величины X и Y независимы, X имеет нормальное распределение с единичной дисперсией, а Y одинаково распределена с $(-X)$. Найти плотность распределения суммы $X + Y$.

83. Случайные величины X и Y независимы, X имеет нормальное распределение с параметрами $\alpha,\ \ \sigma^2$, а Y одинаково распределена с $2X$. Найти плотность распределения суммы $X + Y$.

84. Случайные величины X и Y независимы, имеют нормальное распределение с параметрами $0,\ \ \sigma^2$. Найти все значения параметра c, при которых $X + Y$ и cX одинаково распределены.

85. Привести пример неотрицательной случайной величины, у которой нет математического ожидания.

86. Привести пример дискретной случайной величины, у которой нет математического ожидания.

87. Привести пример распределения невырожденной случайной величины, для которой $\mathbf{E}|X| = -\mathbf{E}X$.

88. Найти границы для $\mathbf{E}|X|$, если известно, что случайная величина X принимает только значения $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$.

89. Найти границы для $\mathbf{E}|X|$, если известно, что плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины X равна нулю вне отрезка $[a;\ b]$.

90. Найти $\mathbf{E}\lambda^{-X}$, если X имеет распределение Пуассона с параметром λ.

91. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Верно ли, что $\mathbf{E}\frac{1}{X} = 0$?

92. Доказать, что $\mathbf{E}|X|^k \geq \mathbf{E}|X|^r - 1$ при $k > r > 0$.

93. Привести пример распределения случайной величины X такой, что $\mathbf{E}|X|^k < \mathbf{E}|X|^{-k}$.

94. Найти все значения константы C, для которых $\mathbf{D}CX > \mathbf{D}X$, если $\mathbf{D}X > 0$.

95. Выразить $\mathbf{D}(X + 1)^2$ через моменты случайной величины X.

96. Выразить $\mathbf{D}X(1 - X)$ через моменты случайной величины X.

97. Привести пример распределений независимых случайных величин X и Y, для которых $\mathbf{D}XY \neq \mathbf{D}X \cdot \mathbf{D}Y$.

98. Сформулировать условия на математические ожидания независимых случайных величин X и Y, обеспечивающие равенство $\mathbf{D}XY = \mathbf{D}X \cdot \mathbf{D}Y$.

99. Найти, в каких пределах заключена $\mathbf{D}(X - Y)$, если $\mathbf{D}X = \mathbf{D}Y = \sigma^2$.

100. Найти, в каких пределах заключена $\mathbf{D}(2X - 3Y + 1)$, если $\mathbf{D}X = \mathbf{D}Y = \sigma^2$.

101. Найти, какую случайную величину надо прибавить к случайной величине X, чтобы уменьшить ее дисперсию вчетверо.

102. Найти коэффициент корреляции случайных величин X и $X - Y$, где X и Y независимы и имеют распределение Бернулли с параметром p.

103. Задать совместное распределение двух бернуллиевских случайных величин так, чтобы их коэффициент корреляции равнялся -1.

104. Задать совместное распределение двух бернуллиевских случайных величин так, чтобы их коэффициент корреляции равнялся 0.

105. Задать совместное распределение двух бернуллиевских случайных величин так, чтобы их коэффициент корреляции равнялся -1/2.

106. Найти матрицу C — ковариационную матрицу случайного вектора $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ с независимыми одинаково распределенными компонентами, если $c_{11} = 2$.

107. Задать какое-либо отличное от тождественного линейное отображение в $\mathbf{R}^2$, не меняющее распределения стандартного двумерного нормального вектора $\vec{X}$.

108. Задать двумерное распределение с нормальными компонентами так, чтобы оно не имело двумерной нормальной плотности распределения.

109. Случайные векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ независимы и имеют двумерные стандартные нормальные распределения. Найти двумерную плотность распределения случайного вектора $\vec{X} - \vec{Y}$.

110. Случайные векторы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ независимы и имеют двумерные стандартные нормальные распределения. Найти двумерную плотность распределения случайного вектора $2\vec{X} - 3\vec{Y}$.

111. Плотность распределения двумерного случайного вектора $\vec{X}$ равна $f(t_1,\ t_2) = Ae^{-({t_1}^2+t_1t_2+{t_2}^2)}$. Найти константу A.

112. Плотность распределения двумерного случайного вектора $\vec{X} = (X_1,\ X_2)$ равна $f(t_1,\ t_2) = Ae^{-({t_1}^2-t_1t_2+{t_2}^2)}$. Найти стандартное отклонение σ_{X_1}.

113. Задать сходящуюся по вероятности последовательность невырожденных случайных величин $\{X_n\}$, принимающих только отрицательные значения: $\mathbf{P}\{X_n < 0\} = 1$.

114. Задать последовательность случайных величин $\{X_n\}$, не являющуюся сходящейся по вероятности и такую, что $|X_n|$ имеют одно и то же вырожденное распределение для всех n.

115. Пусть $X_n \xrightarrow{P} a,\ \ Y_n \xrightarrow{P} b,\ Z_n \xrightarrow{P} c$. Доказать, что $X_n + Y_n + Z_n \xrightarrow{P} a + b + c$.

116. Пусть $X_n \xrightarrow{P} a,\ \ Y_n \xrightarrow{P} b,\ Z_n \xrightarrow{P} c$. Доказать, что $X_n \cdot Y_n \cdot Z_n \xrightarrow{P} abc$.

117. Дать определение сходимости по вероятности к ∞.

118. Дать определение сходимости по вероятности к $+\infty$.

119. Дать определение сходимости по вероятности к $-\infty$.

120. Привести пример распределения случайной величины X, для которой $\mathbf{P}\{X > \varepsilon\} > 0$ для любого $\varepsilon > 0$, и притом $\mathbf{E}X = 0$. Объяснить, почему для этой случайной величины не имеет места неравенство Маркова.

121. Как должно быть задано совместное распределение случайных величин X и Z, чтобы для некоторой случайной величины Y имели место равенства $\rho(X,\ Y) = -1,\ \ \rho(Y,\ Z) = 1$?

122. Доказать, что если $\rho(X,\ Y) = -1,\ \ \rho(Y,\ Z) = -1$, то $\rho(X,\ Z) = 1$.

123. Привести пример распределения случайной величины, для которого не выполняются условия закона больших чисел Хинчина.

124. Найти предел по вероятности последовательности $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{X_1+\ldots+X_n}$, если $X_1,\ \ X_2,\ \ldots$ независимы и имеют распределение Пуассона с параметром λ.

125. Найти предел по вероятности последовательности $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{X_1+\ldots+X_n}$, если $X_1,\ \ X_2,\ \ldots$ независимы и имеют показательное распределение с параметром λ.

126. Найти предел по вероятности последовательности $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{X_1+\ldots+X_n}$, если $X_1,\ \ X_2,\ \ldots$ независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0;\ b]$.

127. Найти, к какой функции сходится $\mathbf{P}\{\frac{S_n-np}{\sqrt{n}} < t\}$ при $n \to \infty$, если S_n имеет биномиальное распределение с параметрами $n,\ \ p$.

128. Найти, к какой функции сходится $\mathbf{P}\{\frac{S_n-n\lambda}{\sqrt{n}} < t\}$ при $n \to \infty$, если S_n имеет распределение Пуассона с параметром $n\lambda$.

129. Найти, к какой функции сходится $\mathbf{P}\{\frac{S_n-n/\alpha}{\sqrt{n}} < t\}$ при $n \to \infty$, если S_n имеет гамма-распределение с параметрами $n,\ \ \alpha$.

130. Выразить предел вероятности $\mathbf{P}\{|\frac{S_n-np}{\sqrt{n}}| < t\}$ при $n \to \infty$ через функцию Лапласа, если S_n имеет биномиальное распределение с параметрами $n,\ \ p$.

131. Выразить предел вероятности $\mathbf{P}\{\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n}} \geq t\}$ при $n \to \infty$ через функцию Лапласа, если S_n имеет распределение Пуассона с параметром $n\lambda$.

132. Выразить предел вероятности $\mathbf{P}\{|\frac{S_n - n/\alpha}{\sqrt{n}}| \geq t\}$ при $n \to \infty$ через функцию Лапласа, если S_n имеет гамма-распределение с параметрами $n,\ \alpha$.

133. Существует ли последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией, не удовлетворяющая центральной предельной теореме?

134. Полиномиальный коэффициент — это число способов разбить n элементов на подгруппы размеров $k_1,\ \ldots,\ k_r$, где $k_1 + \ldots + k_r = n$. Найти асимптотику полиномиального коэффициента при $r = 3,\ \ n \to \infty$, и фиксированных значениях k_1 и k_2.

135. Оценить вероятность того, что из 100 независимых испытаний хотя бы два закончились неудачей, если вероятность успеха в каждом испытании 0,99.

136. Оценить вероятность того, что в первых 50 независимых испытаниях произошел ровно один успех, а в последующих 50 — не менее одного, если вероятность успеха в каждом испытании 0,02.

137. Вероятность того, что единичное испытание закончится успехом, равна 0,999. Найти допустимое число независимых испытаний для того, чтобы вероятность успешного завершения всех испытаний была не ниже 0,99.

138. В каком случае вероятность потерпеть неудачу в течение часа больше: (1) неудача может произойти каждую минуту (независимо от исходов на других минутах) с вероятностью $1/60$; или (2) неудача может произойти каждую секунду (независимо от исходов на других секундах) с вероятностью $1/3600$?

139. Найти фактическую погрешность пуассоновской аппроксимации вероятности $\mathbf{P}\{S_n = 0\}$ при $n = 2,\ \ p = 1/2$. Сравнить с верхней оценкой погрешности.

140. Привести пример значений n и p, для которых погрешность и в теореме Пуассона, и в теореме Муавра—Лапласа не превосходит 0,001.